**Operations Research WS 2011/2012**

**2. Übungsblatt**

10. Eine Herstellerfirma wird mit der Herstellung eines heiklen und noch nicht ausgereiften Produkts betraut. Jedes Stück des hergestellten Produkts ist mit Wahrscheinlichkeit 1/2 funktionsfähig und mit Wahrscheinligkeit 1/2 irreparabel defekt. Die Herstellerfirma produziert mehrere Stücke des herzustellenden Produkts in einem Produktionslauf mit der Hoffnung, dabei mindestens ein funktionsfähiges Stück herzustellen, und ist im Klaren darüber, dass die restlichen produzierten Exemplare, unabhängig von deren Funktionsfähigkeit, wertlos sind und zum Abfall gehören. Die Produktionskosten betragen 100 Euro pro Stück und die fixen Produktionskosten (Rüstkosten) betragen 300 Euro. Die Zeit bis zur vereinbarten Lieferung ist ausreichend für drei Produktionsläufe. Der Hersteller muss eine Pönale von 1600,00 Euro bezahlen, falls er zur vereinbarten Zeit kein funktionsfähiges Exemplar liefern kann. Bestimmen Sie eine Produktionspolitik, d.h. die Anzahl der Produktionsläufe und die Anzahl der hergestellten Exemplare pro Produktionslauf, die die erwarteten Gesamtkosten des Herstellers minimiert.

11. (Gewinnspiel) Ein beliebtes Gewinnspiel in Las Vegas heißt "alles oder nichts": In jede Runde wird eine bestimmte Anzahl von Jetons gesetzt und je nach Ausgang der Spielrunde entweder verliert der Spieler alle Jetons oder er gewinnt genau so viele Jetons wie ursprünglich eingesetzt. Betrachten Sie einen Spieler, der jede Runde mit Wahrscheinlichkeit 2/3 gewinnt, wobei die Ausgänge unterschiedlicher Runden unabhängig sind. Der Spieler besitzt drei Jetons vor Spielbeginn, spielt höchstens drei Runden und meint gewonnen zu haben, wenn er seinen Jetons-Besitz nach dem Spiel auf mindestens fünf erhöht hat.
Bestimmen Sie eine Spielstrategie, die die Wahrschlinchkeit eines Gewinns im Sinne des Spielers maximiert. Eine Spielstrategie spezifiert die Anzahl der eingesetzten Jetons pro Runde in Abhängigkeit vom Ausgang der vorangehenden Runden.

12. (Ein Lagerhaltungsproblem) Wir betrachten ein beschränktes Ein-Produkt Lager mit Kapazität $M$ (d.h. es können höchstens $M$ Einheiten des Produkts gelagert werden), das zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, \ldots, N-1$ inspiziert wird. Bei der Inspektion zum Zeitpunkt $n$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, wird entschieden ob eine Bestellung abgegeben wird. Es wird weiters ggf. eine Entscheidung über die zu bestellende Menge $b_n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, getroffen. Es wird angenommen, dass die bestellte Menge unmittelbar nach der Bestellung im Lager verfügbar ist. Die Nachfrage $x_n$ nach dem Produkt zwischen den Zeitpunkten $n$ und $n+1$ ergibt sich als Realisation einer diskreten Zufallsvariable $Y_n$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Die Zufallsvariablen $Y_n$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, sind unabhängig und identisch verteilt mit $P(Y_n = x) = q(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}_0$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, und haben eine endlichen Erwartungswert $E$. Es wird einfachheitshalber angenommen, dass die Nachfrage $x_n$ zum Zeitpunkt $n$ unmittelbar nach der Bestellung erfüllt wird. Der nicht durch das Lager gedeckter Bedarf wird vorgemerkt und mit der nächsten Bestellung ausgeglichen. Die Bestellkosten pro Bestellung sind als $c \cdot b_n$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, gegeben, wobei $c > 0$ eine Konstante ist. Die Lagerungs- bzw. Fehlmengenkosten im Zeitintervall $(n, n+1)$ hängen folgendermaßen von der in diesem Zeitintervall gelagerten bzw. fehlenden Menge $z$ des Produkts unmittelbar nach der Bestellung und unmittelbar nach Erfüllung des Bedarfs zu Zeitpunkt $n$, $n = 0, 1, \ldots, n-1$, ab

$$l(s) = \begin{cases} l_1 \cdot z & z \geq 0 \text{ Lagerbestand} \\ -l_2 \cdot z & z < 0 \text{ Fehlemenge} \end{cases} ,$$

wobei $l_1, l_2 \geq 0$ Konstanten sind. Es werden die minimalen erwateten Gesamtkosten sowie eine optimale Bestellpolitik gesucht.

Formulieren Sie dieses Problem als Kontrollmodell und geben Sie die Optimalitätsgleichung an. Die Aktionsvariable (Entscheidungsvariable) soll dem Lagerbestand unmittelbar nach der Bestellung und vor der Erfüllung der Nachfrage entsprechen.

13. Betrachten Sie das Lagerhaltungsproblem aus Beispiel 12. Seien $-V_n(s)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, die minimalen erwarteten Gesamtkosten ab Zeitpunkt $n$, wenn der Lagerbestand unmittelbar vor der Bestellung und der Erfüllung der Nachfrage $s$ beträgt. Sei $G_n(s) = -V_n(s) + cs$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Zeigen Sie, dass $G_n(s) = \min\{J_n(a) \colon s \leq a \leq M\}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, gilt, wobei

$$J_n(a) := c \cdot E + \sum_{x=0}^{\infty} q(x) l(a-x) + \sum_{x=0}^{\infty} q(x) G_{n+1}(a-x) \text{ für } n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

14. Sei $v \colon S \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichte $q(x)$, $x \in \mathbb{N}_0$, aus Beispiel 12 werden die Funktionen $w_1, w_2 \colon S \to \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert:

$$w_1(s) := \sum_{x \in \mathbb{N}_0} q(x) v(s-x) \text{ und } w_2(s) := \min\{v(a) \colon a \geq s\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $w_1$ und $w_2$ konvex sind.

15. Zeigen Sie mit Hilfe der Aussage aus Beispiel 14, dass die in Beispiel 13 definierten Funktionen $J_n(a)$ und $G_n(s)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, konvex sind. Folgern Sie daraus, dass es für das Lagerhaltungsproblem aus Beispiel 12 eine optimale Strategie gibt, die in jedem Intervall $(n, n+1)$ das Bereithalten von $S_n^*$ Einheiten des Produkts und das unmittelbare Ersetzen der nachgefragten Einheiten vorsieht, für geignete $S_n^* \in \mathbb{N}_0$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$.