Operations Research WS 2008/2009

6. Übungsblatt

27. Betrachten Sie das multikriterielle Optimierungsproblem (MCOP) $(X, f, \mathbb{R}^2)/\mathrm{id}/(\mathbb{R}^2, <)$, wobei $X = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$, $f = (f_1, f_2)$ mit $f_1(x) = \sqrt{5 - x^2}$, $f_2(x) = x/2$, und $<$ die *komponentenweise Ordnung* auf $\mathbb{R}^2$ ist. Stellen Sie die Mengen X und $Y = f(X)$ der zulassigen Lösungen im Entscheidungsraum bzw. im Zielfunktionsraum graphisch dar und bestimmen Sie die Pareto-Menge $X_{Par} \subseteq X$ und die effiziente Menge $Y_{eff} \subseteq Y$.

28. Lösen Sie das Problem aus Beispiel 27 wenn die komponentenweise Ordnung durch die *max Ordnung* bzw. die *lexikographische Ordnung* ersetzt wird:

$$\min_{x \in [-1,1]} \max_{i=1,2} f_i(x)$$

$$lex \min_{x \in [-1,1]} (f_1(x), f_2(x))$$

$$lex \min_{x \in [-1,1]} (f_2(x), f_1(x))$$

Vergleichen Sie für alle drei Fälle die Lösungen des modifizierten Problems mit den Pareto-optimalen Lösungen des ursprünglichen Problems.

29. (Ehrgott et al. 1997)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \colon X \to \mathbb{R}$, und $\bar{x} \in X$. Die Menge $L_{\leq}(f(\bar{x})) = \{x \in X \colon f(x) \leq f(\bar{x})\}$ heißt *Niveau-Menge* von f an der Stelle $\bar{x}$, die Menge $L_{=}(f(\bar{x})) = \{x \in X \colon f(x) = f(\bar{x})\}$ heißt *Niveau-Kurve* von f an der Stelle $\bar{x}$ und $L_{<}(f(\bar{x})) = \{x \in X \colon f(x) < f(\bar{x})\}$ heißt *strikte Niveau-Menge* von f an der Stelle $\bar{x}$. Betrachten wir ein MCOP $(X, f, \mathbb{R}^Q)/\mathrm{id}/(\mathbb{R}^Q, <)$. Sei $x^* \in X$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)^T$ und $y_q := f_q(x^*)$ für $q = 1, 2, \ldots, Q$. Zeigen Sie, dass

   (a) x^* ist strikt Pareto-optimal dann und nur dann wenn $\cap_{q=1}^{Q} L_{\leq}(y_q) = \{x^*\}$, wobei $L_{\leq}(y_q)$ die Niveau-Menge von f_q an der Stelle x^* ist, $q = 1, 2, \ldots, Q$.

   (b) x^* ist Pareto-optimal dann und nur dann wenn $\cap_{q=1}^{Q} L_{\leq}(y_q) = \cap_{q=1}^{Q} L_{=}(y_q)$, wobei $L_{\leq}(y_q)$ wie im Punkt (a) und $L_{=}(y_q)$ die Niveau-Kurve von f_q an der Stelle y_q ist, $q = 1, 2, \ldots, Q$.

   (c) x^* ist schwach Pareto-optimal dann und nur dann wenn $\cap_{q=1}^{Q} L_{<}(y_q) = \emptyset$, wobei $L_{<}(y_q)$ die strikte Niveau-Menge von f_q an der Stelle y_q ist, $q = 1, 2, \ldots, Q$.

30. Sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $i = 1, 2, \ldots, Q$. Sei

$$x_i^m = \min\{x \in [a, b] \colon f_i(x) = \min_{x \in [a,b]} f_i(x)\} \text{ und}$$

$$x_i^M = \max\{x \in [a, b] \colon f_i(x) = \min_{x \in [a,b]} f_i(x)\}$$

Verwenden Sie das Ergebnis von Beispiel 29 um folgende identische Gleichungen zu zeigen:

$$X_{Par} = \left[\min_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^M, \max_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^m\right] \bigcup \left[\max_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^m, \min_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^M\right]$$

$$X_{w-Par} = \left[\min_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^m, \max_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^M\right]$$