

Operations Research WS 2008/2009

3. Übungsblatt

12. (Quadratische Produktionsglättung)

Wir betrachten die Lagerung und die Produktion eines Artikels während eines unendlich langen, in abzählbar vielen Perioden eingeteilten Zeithorizonts. Es wird angenommen, dass es ausschließlich zum Periodenbeginn produziert wird, wobei nicht die produzierte Menge selbst sondern die Abweichungen u_j , $j \in \mathbb{N}$, der produzierten Menge von einem Richtwert beobachtet werden. Es wird weiters angenommen, dass es eine einzige Nachfrage $z_0 > 0$ zu Beginn des Planungszeitraums gibt. Die (anteilige) Erfüllung der Nachfrage kann beliebig lange aufgeschoben werden, nicht erfüllte Anteile der Nachfrage verursachen aber Fehlmengenkosten. Der Lagerzustand x_j , $j \in \mathbb{N}$, kann positive oder negative Werte annehmen; die positiven Werte entsprechen tatsächlichen Lagerständen und die negativen Werte entsprechen den Fehlmengen. Das Lager sei zu Beginn des Planungszeitraums leer, $x_0 = -z_0$. Die Gesamtkosten $g(x, u)$ werden pro Periode als Summe der Fehlmengenkosten und der produktionsschwankungsbedingten Kosten gemäß $g(x, u) = x^2 + \rho u^2$, mit einem Gewichtungssparameter $\rho > 0$, errechnet. Modellieren Sie dieses Problem als unendlichstufiges dynamisches Optimierungsproblem mit Diskontierungsfaktor $\alpha \in (0, 1)$. Bestimmen Sie eine Lösung der dazugehörigen Bellmanschen Funktionalgleichung direkt und auch mit Hilfe der Wert- und Politikiteration.

Hinweis: Als Ansatz für die Lösung χ^* der Bellmanschen Funktionalgleichung kann $\chi^*(x) = \delta^* x^2$, $\delta^* \in \mathbb{R}$, gewählt werden.

13. Wir betrachten ein unendlichstufiges dynamisches Optimierungsproblem mit Diskontierungsfaktor $\alpha \in (0, 1)$. Seien die Menge der zulässigen Zustände und die Menge der zulässigen Entscheidungen als $X = \{0, 1, 2\}$ bzw. $\Omega(x) = \{0, 1, 2\}$, $\forall x \in X$, gegeben. Weiters seien die dynamischen Restriktionen und die Kostenfunktion durch $f(x, u) = (x + u) \bmod 3$ bzw. $g(x, u) = \gamma u^2 - \beta(x + 1)$, mit $\gamma > 0$, $\beta > 0$, gegeben. Unter welchen Bedingungen für die Parameter γ und β bricht die Politikiteration schon nach der zweiten Iteration mit einer optimalen Lösung des Problems ab? Wie lässt sich dieses Ergebnis interpretieren?

(α ist hier als gegebene Konstante aus $(0, 1)$ zu betrachten. Die oben genannten Bedingungen sollen in Abhängigkeit von α hergeleitet werden.)

14. (Stochastische dynamische Optimierung)

Ein Herstellerfirma wird mit der Herstellung eines heiklen und noch nicht ausgereiften Produkts betraut. Jedes Stück des hergestellten Produkts ist mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ funktionsfähig und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ irreparabel defekt. Die Herstellerfirma produziert mehrere Stücke des herzustellenden Produkts in einem Produktionslauf mit der Hoffnung, dabei mindestens ein funktionsfähiges Stück herzustellen, und ist im klaren darüber, dass die restlichen produzierten Exemplare unabhängig von deren Funktionsfähigkeit wertlos sind und zum Abfall gehören. Die Produktionskosten betragen 100 Euro pro Stück und die fixen Produktionskosten (Rüstkosten) betragen 300 Euro. Die Zeit bis zur vereinbarten Lieferung ist ausreichend für drei Produktionsläufe. Der Hersteller muss eine Pönale von 1600,00 Euro bezahlen falls er zur vereinbarten Zeit kein funktionsfähiges Exemplar liefern kann. Bestimmen Sie eine Produktionspolitik, d.h. die Anzahl der Produktionsläufe und die Anzahl der hergestellten Exemplare pro Produktionslauf, die die erwarteten Gesamtkosten des Herstellers minimiert.

15. Die Nachfrage nach einem Produkt betrage 650 Einheiten pro Woche. Die Auslieferung erfolgt gleichmäßig. Das Produkt muß bestellt werden, wofür fixe Bestellkosten von 25 Euro anfallen. Die Stückkosten betragen 3 Euro und die Lagerhaltungskosten 0.005 Euro pro Stück und Woche.
- Es wird angenommen, dass Fehlmengen nicht erlaubt sind. Bestimmen Sie, wie oft ein Produktionslauf durchzuführen ist und welche Menge produziert werden sollte.
 - Es wird angenommen, dass Fehlmengen erlaubt sind und die Fehlmengenkosten 3 Euro pro Stück und Woche betragen. Bestimmen Sie wie oft ein Produktionslauf durchzuführen ist und welche Menge produziert werden sollte.
16. MBI ist ein Hersteller von PCs. In jedem der von MBI hergestellten PCs wird ein DVD Laufwerk eingebaut, das MBI von einer anderen Firma namens Ynos kauft. MBI arbeitet rund um das Jahr (52 Wochen im Jahr) und baut 100 der oben erwähnten Laufwerke pro Woche ein. Die Lagerungskosten betragen 20% des Wertes der gelagerten Güter. Die Fixkosten für eine Bestellung bei Ynos betragen 1440 Euro unabhängig von der Bestellmenge. Was die Stückpreise betrifft bietet Ynos jedoch Mengenrabatte an. Der Stückpreis c wird als Funktion der Bestellmenge Q folgendermaßen angegeben:

$$c(Q) = \begin{cases} 100\$/\text{Stück} & 1 \leq Q \leq 99 \\ 95\$/\text{Stück} & 100 \leq Q \leq 499 \\ 90\$/\text{Stück} & Q \geq 500 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge/Bestellpolitik im Sinne eines EOQ Modells mit Mengenrabatten. Es sind also die optimale Bestellmenge und die optimale Periodenlänge zu bestimmen. Wie viele Bestellungen werden bei optimaler Bestellpolitik im Jahr abgegeben? Wie hoch sind die dazugehörigen jährlichen Gesamtkosten?