Operations Research WS 2008/2009

1. Übungsblatt - Dynamische Optimierung

1. **Die Hausdorff-Metrik.** Sei $C(\mathbb{R}^r)$ die Klasse aller nichtleeren, kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^r$. Sei $A \in C(\mathbb{R}^r)$ und $a \in \mathbb{R}^r$. Der Abstand $d'(a, A)$ zwischen a und A wird folgendermaßen definiert: $d'(a, A) = \min_{b \in A} \|a - b\|$, wobei $\| \cdot \|$ die L_2-Norm in $\mathbb{R}^r$ ist. (Warum existiert dieses Minimum?) Sei $B \in C(\mathbb{R}^r)$. Der Abstand zwischen A und B wird folgendermaßen definiert:

$$d(A, B) = \max \left\{ \max_{b \in B} d'(b, A), \max_{a \in A} d'(a, B) \right\} .$$

   Zeigen Sie, daß $d(A, B)$ eine Metrik auf $C(\mathbb{R}^r)$ ist.

2. **Das Rucksackproblem.** Ein Wanderer kann in seinen Rucksack verschiedene Ausrüstungsgegenstände einpacken, wobei unterschiedliche Gegenstände unterschiedliche Gewichte und Werte haben (ein größerer Wert entspricht einem größeren Nutzen). Sei n die Anzahl der zur Verfügung stehenden Ausrüstungsgegenstände. Seien c_i und a_i der Wert bzw. das Gewicht des Gegenstands i, $1 \leq i \leq n$. Gesucht ist eine optimale Rucksackfüllung, d.h. eine Füllung mit maximalem Gesamtwert, wobei ein vorgegebenes Gesamtgewicht des Rucksacks nicht überschritten werden darf. Falls für jeden Ausrüstungsgegenstand nur ein Exemplar in den Rucksack eingepackt werden darf, dann spricht man von einem *(binären) Rucksackproblem*. Falls für jeden Ausrüstungsgegenstand mehrere Exemplare in den Rucksack eingepackt werden darf, dann spricht man von einem *ganzzahligen Rucksackproblem*.

   Formulieren Sie das binäre bzw. das ganzzahlige Rucksackproblem als dynamisches Optimierungsproblem. Verwenden Sie die Bellmansche Funktionalgleichung und das Bellmansche Optimalitätsprinzip um das binäre bzw. das ganzzahlige Rucksackproblem mit folgenden Inputparametern zu lösen:

Gegenstand i	1	2	3	4
Wert c_i	8	6	10	12
Gewicht a_i	2	2	4	6
erlaubtes Gesamtgewicht		11		

3. Betrachten Sie das in der Vorlesung eingeführte dynamische Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} g_j(x_{j-1}, u_j) \\ u.d.N.B. \quad & \\ & x_j = f_j(x_{j-1}, u_j) \quad 1 \leq j \leq n \\ & x_0 = x_a \\ & x_j \in \Xi_j \quad 1 \leq j \leq n \\ & u_j \in \Omega_j(x_{j-1}) \quad 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

   wobei $x_j \in \mathbb{R}^m$, $0 \leq j \leq n$, und $u_j \in \mathbb{R}^r$, $1 \leq j \leq n$, die Zustands- bzw. Entscheidungsvariablen des betrachteten Systems sind. $x_a \in \mathbb{R}^m$ ist der Anfangszustand, f_j stellt die Abhängigkeit des Systemzustands x_j am Ende der Periode j vom Systemzustand x_{j-1} am Beginn der Periode j (ist gleich dem Systemzustand am Ende der Periode $j - 1$) und von den am Beginn der Periode j getroffenen Entscheidungen u_j dar. Ξ_j ist der (nichtleere) Zustandsbereich am Ende der Periode j und $\Omega(x_{j-1})$ ist der von x_{j-1} abhängige (nichtleere) Entscheidungsbereich am Beginn der Periode j.

   Beachten Sie, dass in dieser Problemstellung der Zustand am Ende der Periode j nur von den Entscheidungsvariablen u_j und dem Zustand x_{j-1} am Ende der vorherigen Periode abhängt. Daher wird dieses Problem auch dynamisches Optimierungsproblem *erster Ordnung* genannt.

Betrachten Sie nun ein ähnliches dynamisches Optimierungsproblem in dem der Zustand x_j am Ende einer Periode j auch vom Zustand x_{j-2} am Ende der Periode $j-2$ abhängt (ein dynamisches Optimierungsproblem *zweiter Ordnung*). Zeigen Sie, dass ein dynamisches Optimierungsproblem zweiter Ordnung mit Hilfe von modifizierten Zustandsvariablen als dynamisches Optimierungsproblem erster Ordnung formuliert werden kann.

4. Angenommen, der Bedarf r_i, $1 \leq i \leq 5$, eines Bauteiles ist für die nächsten fünf Monate folgendermaßen gegeben: $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 2$, $r_4 = 2$ und $r_5 = 4$. Die Bauteile müßen bestellt werden; die Rüstkosten betragen 5 Euro, die Produktionskosten 1 Euro pro Stück und Periode und die Lagerkosten 0,30 Euro pro Stück und Monat. Es wird weiters angenommen, dass alle Bestellungen eines Monats zum Monatsbeginn getätigt werden und, dass die bestellte Menge jedesmals unmittelbar nach der Bestellung, ohne zeitliche Verzögerung, eintrifft. Schließlich wird angenommen, dass der gesamte Monatsbedarf zum Monatsbeginn und unmittelbar nach Eintreffen der bestellten Menge verbraucht wird. Ermitteln Sie mit Hilfe eines dynamischen Optimierungsverfahren den kostenminimalen Bestellungsplan, der den monatlichen Bedarf erfüllt.

5. Ein Taxi-Unternehmen verbraucht pro Monat Benzin in einer Menge von 8500 Liter. Der Verbrauch erfolgt kontinuierlich mit konstanter Verbrauchsrate. Die Benzinkosten betragen 1,20 Euro pro Liter, mit fixen Bezugskosten von 1000 Euro. Die Lagerungskosten belaufen sich auf 1 Cent pro Liter und Monat. Bestimmen Sie wie oft eine Bestellung aufgegeben und welche Menge bestellt werden sollte, wenn keine Fehlmengen erlaubt sind und die Gesamtkosten minimiert werden sollten.

6. Betrachten Sie den Graph G aus Abbildung 1. Es wird angenommen, dass jede Kante (i, j) in beiden Richtungen (von i nach j und von j nach i) durchlaufen werden kann und die Kantenlängen jeweils für beide Richtungen gelten. Bestimmen Sie mit Hilfe der dynamischen Optimierung einen kürzesten Weg von i nach 5 für jedes i, $i = 1, 2, 3, 4$, in G.

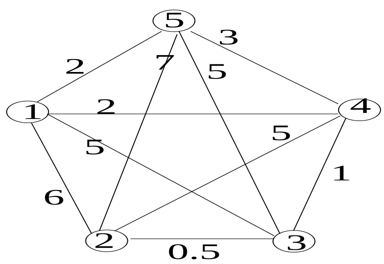

Abbildung 1