

Bellman'sche Funktionalgleichungsverfahren zur Lösung
von dynamischen Optimierungsproblemen - Version A

Algorithm *Bellman'sche Funktionalgleichung - Version A*

Input:

1. Kostenfunktion g_j ,
2. Funktionen f_j ,
3. Anfangszustand x_a ,
4. Intervallgrenzen ξ^- und ξ^+ des Zustandsbereiches,
5. Intervallgrenzen $\omega^-(\cdot)$ und $\omega^+(\cdot)$ des Steuerbereiches,
6. Diskretisierungsparameter p und q_ρ , $\rho = 1, 2, \dots, p$.

Output:

7. Eine optimale Politik $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$,
8. die dazugehörige Zustandsfolge $(x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$,
9. die minimalen Kosten G^* ,
10. eine obere Grenze für den aufgetreten Rechenfehler $|G^* - \hat{G}|$.

11. **Vorbereitungsschritt**

12. $\Delta\xi = \frac{\xi^+ - \xi^-}{p}$
13. Für $\rho = 1, 2, \dots, p$ setze $\Delta\omega_\rho := \frac{\omega^+(\xi^- + \rho\Delta\xi) - \omega^-(\xi^- + \rho\Delta\xi)}{q_\rho}$
14. $\alpha = 0; \beta = 1$

15. **Rückwärtsrechnung**

16. Fall $j=n$:
17. $B=FALSE$
18. **for** $\rho \leftarrow 0$ **to** p **do**
19. $x := \xi^- + \rho\Delta\xi$, $\phi_{\alpha,\rho} := \infty$
20. **for** $\sigma \leftarrow 0$ **to** q_ρ **do**
21. $u := \omega^-(x) + \sigma\Delta\omega_\rho$
22. Falls $g_n(x, u) < \phi_{\alpha,\rho}$ und $f_n(x, u) \geq \xi^-$ und $f_n(x, u) \leq \xi^+$, setze $\phi_{\alpha,\rho} := g_n(x, u)$ und $\eta_{n,\rho} := u$
23. Falls $\phi_{\alpha,\rho} < \infty$, setze $B := TRUE$.
24. Falls $B = FALSE$ gehe zu (55), sonst zu (25).
25. Fall $j < n$:
26. **for** $n \leftarrow n - 1$ **to** 1 **do**
27. $B := FALSE$, $\phi_{\alpha,p+1} := 0$
28. **for** $\rho \leftarrow 0$ **to** p **do**
29. $x := \xi^- + \rho\Delta\xi$, $\phi_{\beta,\rho} := \infty$
30. **for** $\sigma \leftarrow 0$ **to** q_ρ **do**
31. $u := \omega^-(x) + \sigma\Delta\omega_\rho$
32. $\tilde{x} := f_j(x, u)$
33. **if** $\tilde{x} \geq \xi^-$ und $\tilde{x} \leq \xi^+$ **then**
34. $\tau := \frac{\tilde{x} - \xi^-}{\delta\xi^-}$, $\tau' := [\tau]$, $\tau'' := \tau - \tau'$
35. $\tilde{\phi} := \phi_{\alpha,\tau'} + \tau''(\phi_{\alpha,\tau'+1} - \phi_{\alpha,\tau'})$
36. Falls $g_j(x, u) + \tilde{\phi} < \phi_{\beta,\rho}$, setze $\phi_{\beta,\rho} := g_j(x, u) + \tilde{\phi}$ und $\eta_{j,\rho} := u$
37. Falls $\phi_{\beta,\rho} < \infty$, setze $B := TRUE$

38. $s := \alpha, \alpha := \beta, \beta := s$
39. Falls $B = FALSE$ gehe zu (55).
40. Falls $j = 1$, setze $p := 0$ und $\xi^- := x_a$.
41. Gehe zu (42).
42. Vorwärtsrechnung:
43. $x_0^* := x_a$.
44. $u_1^* := \eta_{1,0}$.
45. $x_1^* := f_1(x_0, u_1)$.
46. **for** $j \leftarrow 2$ **to** n **do**
47. $\tau := \frac{x_{j-1}^* - \xi^-}{\Delta\xi}, \tau' := [\tau], \tau'' := \tau - \tau', \eta_{j,p+1} := 0$
48. $u_j^* := \eta_{j,\tau'} + \tau''(\eta_{j,\tau'+1} - \eta_{j,\tau'})$
49. $x_j^* := f_j(x_{j-1}^*, u_j^*)$.
50. Gehe zu (51)
51. $\hat{G} := \phi_{a,0}, G^* := 0$.
52. **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
53. $G^* := G^* + g_j(x_{j-1}^*, u_j^*)$
54. Stop. $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ stellt eine optimale Politik dar. $(x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ stellt die zugehörige Zustandsfolge und G^* die minimalen Kosten dar. $|G^* - \hat{G}|$ ist ein Maß für die aufgetretenen Rechenfehler.
55. Stop. Die gewählte Diskretisierung des Zustands- und Steuerbereiches liefert keine zulässige Lösung. Die Diskretisierung ist zu verfeinern.