Mathematische Optimierung SS 2013
9. Übungsblatt

48. Betrachten Sie ein Matrix-Spiel definiert wie in Übungsbeispiel 45

   (a) Zeigen Sie dass für die konsistenten Strategien definiert in 45(c) folgende Gleichungen gelten:
   $$\min_y \max_x y^t Ax = \max_x (y^*)^T Ax = (y^*)^T Ax^* = \min_y y^T Ax^* = \max_x \min_y y^T Ax\,.$$

   (b) Die Bedingung
   $$(y^*)^T Ax \leq (y^*)^T Ax^* \leq y^T Ax^* \ \forall x \in X\,,\ \forall y \in Y \tag{1}$$
   mit $Y := \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}_{+} \colon \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \mathrm{y_i} = 1 \right\}$ and $X := \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}_{+} \colon \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i} = 1 \right\}$, heißt *Sattelpunktbedingung*. Das Paar (x^*, y^*) heißt Nash-Gleichgewicht. Unmittelbar aus dem obigen Punkt (a) folgt dann, dass (x^*, y^*) dann und nur dann ein *Nash-Gleichgewicht*[1] ist, wenn x^* und y^* konsistente Strategien sind. Zeigen Sie es!

   (c) Zeigen Sie basierend auf (a) und (b), dass sich die alleinige Veränderung der Strategie eines Spielers nicht lohnt, d.h. ein Abweichen des Spaltenspielers (Zeilenspielers) von der Strategie x^* (y^*) führt zu keiner höheren Auszahlung, wenn der Zeilenspieler (Spaltenspieler) seine Strategie beibehält.

49. Betrachten Sie ein Matrix-Spiel definiert wie in Übungsbeispiel 45. Gibt es immer konsistente Strategien x^*, y^* für den Spaltenspieler bzw. den Zielenspieler, in denen jeweils höchstens $\min\{m, n\}$ viele Aktionen mit Wahrscheinlichkeit größer als 0 gespielt werden? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

50. (*Das Morra Spiel.*) Zwei Spieler zeigen gleichzeitig jeweils einen oder zwei Finger und jeder Spieler gibt im voraus seine Schätzung für die Gesamtanzahl der von beiden Spielern gezeigten Finger bekannt. Wenn nur einer der Spieler richtig schätzt, dann gewinnt er einen Betrag, der seiner Schätzung entspricht. Ansonsten endet das Spiel „unentschieden“ und keiner der Spieler gewinnt etwas.

   (a) Geben Sie die *Payoff Matrix* dieses Spiels an.

   (b) Formulieren Sie das Problem des Zeilenspielers als lineares Optimierungsproblem. (Das Ziel des Zeilenspielers ist die Minimierung seines erwarteten Verlustes, vgl. Vorlesung).

   (c) Bestimmen Sie die optimalen randomisierten Strategien des Zeilen- bzw. Spaltenspielers und den Wert das Spiels.

51. Einem Investor stehen n verschiedene Investitionsprojekte für einen Zeitraum von m Perioden zur Verfügung. Für $i \in \{1, 2, \ldots, m\} := [m]$ sei σ_i sein externer Kapitalzufluss in Periode i (positiv oder negativ). Für $i \in [m]$, $j \in [n]$, sei α_{ij} die mit dem Projekt j am Ende der Periode i verbundene Ausschüttung (Gewinn oder Verlust). Ferner sei γ_j für $j \in [n]$ der erwartete Resterlös von Projekt j zum Ende m der Laufzeit.

   Auf dem zugrunde liegenden (idealisierten) Kapitalmarkt gilt für die Vergabe und Aufnahme von Krediten der gleiche Zinssatz ρ, Gebühren fallen nicht an, und das am Markt verfügbare Kapitalvolumen ist unbegrenzt.

   Man betrachte das folgende Investitionsmodell
   $$\begin{array}{lrcll} \max & \sum_{j=1}^n \gamma_j \xi_j + \eta_m & & & \\ & -\sum_{j=1}^n \alpha_{1j}\xi_j + \eta_1 & \leq & \sigma_1 & \\ & -\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j - (1+\rho)\eta_{i-1} + \eta_i & \leq & \sigma_i & \text{für } i \in [m] \setminus \{1\} \\ & 0 \leq \xi_j & \leq & 1 & \text{für } j \in [n] \end{array}$$

[1] Das Nash-Gleichgewicht geht auf die Dissertation „Non-cooperative games“ von John Forbes Nash (geb. 1928) im Jahre 1950 in Princeton zurück; 1994 erhielt er hierfür den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Die Lebensgeschichte von John Forbes Nash wurde durch den preisgekrönten Film „A beautiful mind“ einem breiten Publikum bekannt.

in den Variablen ξ_j und η_i. Dabei ist ξ_j der Anteil, zu dem man in das Projekt j investiert und η_i bezeichnet das in Periode i aufgenommene ($\eta_i \leq 0$) bzw. verliehene Kapital ($\eta_i \geq 0$). Die oberen Schranken von 1 über ξ_j besagen, dass es grundsätzlich möglich ist, in jedes Projekt voll zu investieren.

(a) Formulieren Sie die duale Aufgabe und geben Sie eine ökonomische Interpretation der dualen Variablen und der Komplementaritätsbedingungen. Nach welchem Kriterium sollte entschieden werden, ob man ein Projekt in das Portfolio aufnimmt?

(b) Untersuchen Sie, ob das Modell stets eine optimale Lösung ohne fraktionelle Projektbeteiligung zulässt.