Mathematische Optimierung SS 2013
8. Übungsblatt

45. **Matrix Spiele.** Ein *Matrix Spiel* is ein zwei Personenspiel zwischem einem sogenannten *Zeilen-Spieler* und einem sogenannten *Spalten-Spieler*. In jeder Spielrunde wählt der Zeilen-Spieler unabhängig vom Spalten-Spieler eine *Aktion* aus einer endlichen Menge von möglichen Aktionen indexiert durch $\{1, 2, \ldots, n\}$. Analog wählt der Spalten-Spieler eine Aktion aus einer endlichen Menge von möglichen Aktionen indexiert durch $\{1, 2, \ldots, m\}$. (Die Spieler können i.A. aus spielerspezifischen Menge von möglichen Aktionen wählen.) Dann offenbart jeder Spieler die von ihm gewählte Aktion. Für jedes Paar (i, j) von Aktionen des Zeilen- bzw. Spalten-Spielers, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, gibt es ein sogenanntes *Payoff* a_{ij}; $a_{ij} \geq 0$ bedeutet, dass der Spalten-Spieler die Runde gewonnen hat und als Gewinn a_{ij} Geldeinheiten vom Zeilen-Spieler bekommt. Umgekehrt, gilt $a_{ij} < 0$, so hat der Zeilen-Spieler gewonnen (der Spalten-Spieler hat in diesem Fall verloren) und $|a_{ij}|$ Geldeinheiten werden vom Spalten-Spieler zum Zeilen-Spieler bezahlt. Eine *Strategie* des Zeilen- bzw. Spalten-Spielers beschreibt die Aktionauswahlregel des jeweiligen Spielers. Eine deterministische Strategie ist die einfachste Aktionauswahlregel, bei der stets ein und dieselbe Aktion gewählt wird. Eine randomisierte Strategie ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die möglichen Aktionen, die zB. für den Zeilen-Spieler durch einen Vektor $y = (y_i) \in \mathbb{R}^m$ mit $\sum_{i=1}^{m} y_i = 1$, $y \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, spezifiziert wird. Auch eine deterministische Strategie kann durch einen Vektor, nämlich einen Einheitsvektor, dargestellt werden. Sei x eine randomisierte Strategie des Spalten-Spielers und y eine randomisierte Strategie des Zeilen-Spielers. Der erwartete pay-off des Spalten-Spielers ist dann als $y^t Ax$ gegeben, wobei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die *Payoff Matrix* ist.

    (a) Zeigen Sie, dass das Problem der Bestimmung einer Strategie y^* des Zeilen-Spielers, die den erwarteten Payoff des Spalten-Spielers (das ist auch der erwartete Verlust des Zeilen-Spielers) für eine fixe Strategie x des Spalten-Spielers minimiert, als lineares Optimierungsproblem formuliert werden kann.

    (b) Es gilt eine Strategie x^* des Spalten-Spielers zu bestimmen, die den erwarteten pay-off des Spalten-Spielers maximiert, vorausgesetzt der Zeilen-Spieler reagiert mit der dazugehörigen für ihn besten Strategie (vgl. (a)) auf jede Strategie des Spalten-Spielers. D.h., es gilt eine Lösung des Problems $\max_x \min_y y^T Ax$ zu bestimmen, wobei das Maximum über alle (randomisierten) Strategien des Spalten-Spielers und das Minimum über alle (randomisierten) Strategien des Zeilen-Spielers gebildet wird. Zeigen Sie, dass dieses Problem als lineares Optimierungsproblem formuliert werden kann.

    (c) Betrachten Sie das lineare Problem aus (b) und geben Sie eine Interpretation des dazugehörigen dualen Problems im Kontext des Matrix Spiels. Zeigen Sie, dass es für jedes Matrix Spiel sogennante *konsistente Strategien* x^* und y^* gibt, für die gilt:

    $$\max_x (y^*)^T Ax = \min_y y^T Ax^* \,.$$

    $u^* = \max_x (y^*)^T Ax = \min_y y^T Ax^*$ heißt *Wert des Spiels*.

    (d) Ein Spiel, dessen Wert gleich 0 ist, heißt *faires Spiel*. Zeigen Sie, dass ein Matrix Spiel mit einer schief-symmetrischen Payoff Matrix ein faires Spiel ist.

    (e) Bestimmen Sie den Wert des Spiels und konsistente Strategien des Zeilen- bzw. Spalten-Spielers für das Schere-Stein-Papier Spiel mit folgender Payoff Matrix:

	Schere	Stein	Papier
Schere	0	4	−3
Stein	−6	0	5
Papier	1	−2	0

46. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die *Payoff Matrix* eines Matrix Spiels (vgl. Übungsbeispiel 45). Wir sagen, dass die r-te Zeile die s-te Zeile dominiert falls $a_{rj} \geq a_{sj}$, für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Analog dominiert die r-te Spalte die s-te Spalte falls $a_{ir} \geq a_{is}$, für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Zeigen Sie:

   (a) Falls eine Zeile r eine andere Zeile dominiert, dann gibt es eine optimale Strategie y^* des Zeilen-Spielers mit $y_r^* = 0$.

   (b) Falls eine Spalte s von einer anderen Spalte dominiert wird, dann gibt es eine optimale Strategie x^* des Spalten-Spielers mit $x_s^* = 0$.

   Verwenden Sie diese Ergebnisse um die folgende Payoff Matrix auf eine 2×2 Matrix zu reduzieren:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & -2 & -9 & -1 \\ -7 & 3 & -3 & -8 & -2 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

47. In einem zwei Personenspiel wählt jeder der zwei Spieler A und B eine Zahl zwischen 1 und 100. Das Spiel endet „unentschieden", wenn beide Spieler die gleiche Zahl wählen. Andernfalls gewinnt der Spieler, der die kleinste Zahl gewählt hat, falls die Differenz zwischen der größeren und der kleineren Zahl mehr als 1 ist. Ansonsten gewinnt der Spieler, der die größere Zahl gewählt hat. Bestimmen Sie eine optimale Strategie für dieses Spiel. In diesem Spiel entspricht jeder Gewinn einem Payoff von einer Einheit bzw. jeder Verlust einem Payoff von -1.