Mathematische Optimierung SS 2013
7. Übungsblatt

38. Lösen Sie das untenstehende lineare Programm mit einem Verfahren ihrer Wahl. Sei $x^* \in \mathbb{R}^4$ eine optimale Lösung. Wir bezeichnen mit $c = (1,2,1,1)^T$ und $b = (8,12,18)^T$ die Vektoren der Koeffizienten in der Zielfunktion bzw. auf der rechten Seite der linearen Restriktionen. Ermitteln Sie für jedes c_i, $1 \le i \le 4$, bzw. b_j, $1 \le j \le 3$, das größtmögliche Intervall $[\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ bzw. $[\underline{b}_j, \bar{b}_j]$, sodass x^* eine optimale Lösung des linaren Programms bleibt, für alle Werte $c_i \in [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ bzw. $b_j \in [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$.

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\
\text{unter} & & & & & & & & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & \le & 8 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & \le & 12 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & \le & 18 \\
 & & & x_1\,, & & x_2\,, & x_3\,, & x_4 & \ge & 0\,.
\end{array}
$$

39. Lösen Sie folgendes lineare Programm mit der selbst-dualen Simplexmethode.

$$
\begin{array}{lrrcrcr}
\max & - & x_1 & - & x_2 & & \\
 & - & 2x_1 & - & x_2 & \le & 4 \\
 & - & 2x_1 & + & 4x_2 & \le & -8 \\
 & - & x_1 & + & 3x_2 & \le & -7 \\
 & & x_1\,, & & x_2 & \ge & 0\,.
\end{array}
$$

40. Sei P ein lineares Programm in der Standardform

$$
\text{(P)} \qquad \max\{\, c^t x | Ax \le b, x \ge 0 \,\}.
$$

Formulieren Sie exakte Kriterien zur Erkennung der Unzulässigkeit bzw. Unbeschränktheit von P im Rahmen des selbst-dualen Simplexverfahrens.

41. Betrachten Sie die folgende einparametrische Familie von linearen Programmen:

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcr}
\max & (4-4\mu)x_0 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & & \\
\text{unter} & & & & & & & & & & & \\
 & x_0 & - & x_1 & & & & & & & \le & 1 \\
 & x_0 & & & - & x_2 & & & & & \le & 2 \\
 & x_0 & & & & & - & x_3 & & & \le & 4 \\
 & x_0 & & & & & & & - & x_4 & \le & 8 \\
 & & & x_0\,, & & x_1\,, & & x_2\,, & x_3\,, & x_4 & \ge & 0\,.
\end{array}
$$

Verwenden Sie die Homotopiemethode um eine optimale Lösung des Problems $\forall \mu \in (-\infty, +\infty)$ zu ermitteln, beginnend mit $+\infty$.

42. Seien die (komponentenweise) positiven Vektoren $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}_+$ und $q \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}_+$ so, dass $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$, und sei $\beta \in (0,1)$ eine reelle Zahl. Betrachten Sie das folgende lineare Programm

$$
\max\left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \colon x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}\,, \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{q_i x_i} \le \beta\,, \mathrm{x_i} \in [0,1]\,, \forall \mathrm{i} \in \{1,2,\ldots,\mathrm{n}\} \right\}.
$$

Es gelte weiters

$$
\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_n}{q_n}\,.
$$

Sei $k := \min\{j\colon q_{j+1} + \cdots + q_n \leq \beta\}$. Sei y_o die zur Restriktion $\sum_{i=1}^{n} q_i x_i \leq \beta$ gehörende duale Variable und sei y_i die zur Restriktion $x_i \leq 1$ gehörende duale Variable für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Dualitätstheorie, dass die folgenden Vektoren optimal für das primale bzw. duale Problem sind:

$$x_j = \begin{cases} 0 & j < k \\ \frac{\beta - q_{k+1} - \cdots - q_n}{q_k} & j = k \\ 1 & j > k \end{cases} ,$$

$$y_i = \begin{cases} \frac{p_k}{q_k} & i = 0 \\ 0 & 0 < i \leq k \\ q_i \left(\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_k}{q_k} \right) & i > k \end{cases} .$$

43. (*l_1-Regression.*) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m} \times \mathrm{n}}$ eine gegebene Matrix und $b \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}}$ ein gegebener Vektor. Zeigen Sie, dass das folgende Optimierungsproblem als lineares Programm formuliert werden kann:

$$\min_{x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}} \sum_{i=1}^{m} \left| b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| .$$

44. Sei $b \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}}$ ein sortierter Vektor mit $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_m$. Zeigen Sie mit Hilfe der linearen Optimierung, dass $\frac{b_1 + b_m}{2}$ die maximale absolute Abweichung aus b_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, minimiert:

$$\frac{b_1 + b_m}{2} = \mathrm{argmin}_{x \in \mathrm{I\!R}} \max_{i \in \{1, 2, \ldots, n\}} |x - b_i| .$$