

Mathematische Optimierung SS 2013

5. Übungsblatt

26. Ist der Punkte $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{5}{12}, 0, 0)$ eine Optimallösung für das folgende lineare Programm?

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \\ \text{unter} & x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_5 \leq 3 \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Wenn ja, beweisen Sie es. Wenn nein, finden Sie eine bessere Lösung. Nehmen Sie dazu auf jeden Fall das duale Programm und den Satz vom komplementären Schlupf zu Hilfe.

27. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 \\ \text{unter} & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- (a) Stellen Sie das zu P duale lineare Programm D auf.
(b) Bestimmen Sie Optimallösungen von P und D sowie die zugehörigen optimalen Zielfunktionswerte. (Wählen Sie dazu eine Ihnen vom Rechenaufwand her vorteilhaft erscheinende Vorgangsweise.)
(c) Wie groß darf der Zielfunktionskoeffizient der Variable im Dualproblem D, die zur ersten Restriktion in P korrespondiert, maximal werden, ohne daß sich die Optimallösung von D verändert?
28. Sei A eine gegebene symmetrische $n \times n$ Matrix. Betrachten Sie das lineare Programm der Form $\min c^t x$ unter den Restriktionen $Ax \geq c$ und $x \geq 0$. Sei x^* ein Vektor mit $Ax^* = c$ und $x^* \geq 0$. Zeigen Sie, daß x^* eine Optimallösung des gegebenen linearen Programms ist.

29. Gegeben seien reelle Zahlen $c_1 > c_2 > c_3 > \dots > c_n$, und folgendes lineare Programm:

$$\max c^t x : \text{unter } \sum_i x_i = 3, \quad 0 \leq x_i \leq 1.$$

Stellen Sie das duale Problem dazu auf, und geben Sie (ohne zu rechnen) eine optimale Lösung des primalen und dualen Problems an.

30. Lösen Sie folgendes lineares Programm mit dem dualen Simplexverfahren:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ \text{unter} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \geq 6 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 10 \\ & 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \geq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie ferner eine Optimallösung, wenn die zusätzliche Restriktion $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 8$ eingeführt wird.

31. Dualität für lineare Programme mit Absolutbeträgen.

Bringen Sie ein lineares Programm, von der Art, wie sie im folgenden angegeben ist, in kanonischer Form. Bestimmen Sie das duale Programm und vereinfachen Sie es.

- (a) ein lineares Programm, das in der kanonischen Form ist, außer dass die Variable x_1 nicht vorzeichenbeschränkt ist und in der (zu maximierenden) Zielfunktion in der Form $-|c_1 x_1|$ statt als Summand $c_1 x_1$ auftritt;
- (b) ein lineares Programm (mit n Variablen) in kanonischer Form mit einer zusätzlichen Restriktion der Form $|\alpha(x)| \leq b$, wobei α eine lineare Funktion in den Variablen x_1, x_2, \dots, x_n und b eine Konstante ist.