Mathematische Optimierung SS 2013

4. Übungsblatt

23. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rc} \min & c^t x + d^t y \\ \text{unter} & Ax + By \leq b \\ & y_i = |x_i|,\ 1 \leq i \leq n \end{array}$$

mit $A, B \in \mathrm{IR}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$, $b \in \mathrm{IR}^{\mathrm{m}}$, $c, d \in \mathrm{IR}^{\mathrm{n}}$. Weiters seien alle Einträge der Matrix B und des Vektors d nichtnegativ.

(a) Formulieren Sie dieses Optimierungsproblem als lineares Programm.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Formulierung, d.h. zeigen Sie, dass die beiden Probleme vom Gesichtspunkt der Existenz einer zulässigen Lösung und vom Gesichtspunkt des optimalen Zielfunktionswerts äquivalent sind.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, daß wenn die Matrix B negative Einträge enthalten kann, lokale Optima auftreten können, die keine globalen Optima sind. Was läßt sich daraus für die Formulierbarkeit des gegebenen Problems als lineares Programm besagen, wenn keine Vorzeicheneinschränkungen an B gemacht werden.

24. (a) Betrachten Sie das lineare Optimierungsprogramm $\max\{c^t x\colon Ax \leq b, Gx = d, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathrm{IR}^{\mathrm{m_1}\times\mathrm{n}}$, $G \in \mathrm{IR}^{\mathrm{m_2}\times\mathrm{n}}$, $b \in \mathrm{IR}_+^{\mathrm{m_1}}$, $d \in \mathrm{IR}_+^{\mathrm{m_2}}$, $c \in \mathrm{IR}^{\mathrm{n}}$. Skizzieren Sie eine Variante eines Zweiphasen-Simplexverfahrens, das dieses Problem löst, ohne das Problem zuerst auf die kanonische Form zu transformieren.

(b) Betrachten Sie das lineare Optimierungsprogramm $\max\{c^t x\colon Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathrm{IR}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$, $b \in \mathrm{IR}_+^{\mathrm{m}}$, $c \in \mathrm{IR}^{\mathrm{n}}$. Zur Lösung dieses Problems mit Hilfe eines Simplexverfahrens ist es nicht notwendig das Problem zu erst in die kanonische Form zu transformieren; es reicht eine Modifikation des Optimalitätskriteriums und der Prozeduren zur Auswahl der Pivotzeile und der Pivotspalte (vgl. generisches Simplexverfahren für ein Problem in kanonischer Form aus der Vorlesung). Schildern Sie diese Modifikationen und argumentieren Sie über die Korrektheit des modifizierten Algorithmus.

25. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \min & -5x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 10 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 10 \\ & & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq & 7 \\ & & & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} & & \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Basislösung von P, die zur Basis $(1, 2, 3, 4)$ korrespondiert.

(b) Stellen Sie das zu P duale lineare Programm D auf.

(c) Prüfen Sie ob die in (a) bestimmte Basislösung eine Optimallösung von P darstellt. Wenn dies nicht der Fall ist, bestimmen Sie eine solche.

(d) Bestimmen Sie eine Optimallösung für D sowie den zugehörigen optimalen Zielfunktionswert.