Mathematische Optimierung SS 2013

3. Übungsblatt

16. Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Wert der Funktion f mit $f(x) := x_1 + 3x_2 - x_3$ auf der Menge, die durch die folgenden Bedingungen beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x \ge 0.$$

17. Lösen Sie das lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & \le & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \le & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \le & 4 \\ & & & x_1,\ x_2 \ge 0 & & \end{array}$$

Eine zulässige Startlösung ist mit der M-Methode zu bestimmen.

18. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \min & 9x_1 & + & 16x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & & \\ \text{unter} & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \le & -10 \\ & x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & \ge & 5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

(a) Lösen Sie dieses lineare Programm mit dem Simplexverfahren ausgehend von der Basislösung, die zu $B = (2, 3)$ gehört.

(b) Lösen Sie dieses lineare Programm mit der Zweiphasenmethode von Dantzig.

19. Die Koeffizientenmatrix A und der Vektor b der rechten Seite eines linearen Programms mit Restriktionen $Ax = b$, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t \ge \vec{0}$ seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß die ersten drei Spalten von A eine Basislösung von $Ax = b$ liefern. Ist diese Basis zulässig bzw. entartet? Bestimmen Sie durch Pivotoperationen die restlichen Basislösungen, und prüfen Sie, welche davon entartet, bzw. zulässig sind für das System $\{\, x : Ax = b, x \ge 0 \,\}$.

20. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Wenn das lineare Programm in Standardform

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & \sum_{j=1}^n c_j x_j & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \le & b_j & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \ge & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist, dann gibt es einen Index k, für den das lineare Programm

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximiere} & x_k & & & \\ \text{unter} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \le & b_j & \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j & \ge & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

unbeschränkt ist. Gilt die Umkehrung der obigen Subjunktion?

21. Folgendes Tableau ergab sich als Zwischenstufe bei der Lösung von $\min c^t x$ unter $Ax = b, x \geq 0$ mit Hilfe der Simplexmethode:

		x_2	x_3	x_5
	-8	8/3	-11	4/3
x_1	4	2/3	0	4/3
x_4	2	-7/3	3	-2/3
x_6	2	-2/3	-2	2/3

$B = \{1, 4, 6\}$ ist die augenblickliche Basis.

(a) Drücken Sie die augenblicklichen abhängigen Variablen und die Zielfunktion durch die augenblicklichen unabhängigen Variablen aus.

(b) Welche Pivotoperation muß als nächstes folgen?

(c) Rekonstruieren Sie das ursprüngliche Problem, falls folgendes noch bekannt ist:

$$c_1 = 1 \qquad c_4 = 3 \qquad A_B^{-1} = (a_1, a_4, a_6)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

22. Lösen Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 10\,x_1 & - & 57\,x_2 & - & 9\,x_3 & - & 24\,x_4 & & \\ \text{unter} & 0,5\,x_1 & - & 5,5\,x_2 & - & 2,5\,x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\ & 0,5\,x_1 & - & 1,5\,x_2 & - & 0,5\,x_3 & + & x_4 & \leq & 0 \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) mit der lexikographischen Zeilenauswahlregel,

(b) mit der kleinsten-Index-Regel (die Regel von Bland).