Mathematische Optimierung SS 2013
10. Übungsblatt

52. Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 + x_2 \\ \text{udNb.} & x_2 \leq 1 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & x_1\,, x_2 \geq 0 \end{array} .$$

(a) Überzeugen Sie sich, dass das obige Problem selbstdual ist.

(b) Formulieren und lösen Sie das Optimierungsproblem zur Bestimmung der Punkte $(x(\mu), s(\mu))$ des zentralen Pfades (vgl. Vorlesung).

(c) Lässt sich in diesem Fall das analytische Zentrum (vgl. Vorlesung) exakt berechnen? Geben Sie die optimale Partition an.

53. Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem.

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ \text{udNb.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} .$$

(a) Geben Sie das für dieses Problem zugehörige selbstduale Optimierungsproblem in Normalform an. (Dieses Problem wurde in der Vorlesung mit $\bar{S}_=$ bezeichnet.)

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von $\bar{S}_=$ den zentralen Pfad, d.h die Punkte $(w(\mu), \omega(\mu), s(\mu), u(\mu))$ für $\mu > 0$. Können Sie die beiden Grenzwerte $\lim_{\mu\to\infty} (w(\mu), \omega(\mu), s(\mu), u(\mu))$ und $\lim_{\mu\to 0} (w(\mu), \omega(\mu), s(\mu), u(\mu))$ bestimmen?

54. Für die folgenden linearen Programme führen Sie jeweils eine Iteration der primal-dualen inneren Punktverfahrens mit (vollen) Newton-Schritten aus. Starten Sie mit der Lösung $(w, \omega, s, u) = (1, 1 \ldots, 1)$ des dazugehörigen selbstdualen Problems.

(a)
$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - 6x_2 \\ \text{udNb.} & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1\,, x_2\,, x_3 \geq 0 \end{array} ,$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \text{udNb.} & 2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1\,, x_2\,, x_3 \geq 0 \end{array} .$$

55. Sei P ein lineares Optimierungsproblems und $\bar{S}_=$ das dazugehörige selbstduale lineare Programm in Normalform. Es wird angenommen, dass $\bar{S}_=$ einen inneren Punkt besitzt.
Sei $\{(w(\mu), \omega(\mu), s(\mu), u(\mu)) : \mu > 0\}$ der zentrale Pfad von $\bar{S}_=$. Für jedes $\mu > 0$ geben Sie das dazugehörige Paar $(x(\mu), y(\mu))$ von primalen und dualen Lösungen von P und seinem dualen Problem D in Abhängigkeit von $(w(\mu), \omega(\mu), s(\mu), u(\mu))$ an. Zeigen Sie, dass $\lim_{\mu\to\infty}(b^t y(\mu) - c^t x(\mu)) = \infty$ gilt.

56. Betrachten Sie ein lineares Programm dessen zulässiger Bereich beschränkt ist und ein nicht leeres Innere hat. Zeigen Sie, dass der zulässige Bereich des dualen Problems unbeschränkt ist. (Dazu kann zB. die Aussage von Beispiel 55 verwendet werden.)