Mathematische Optimierung SS 2013

1. Übungsblatt

1. Eine Softwarefirma vertreibt Programmpakete anderer Hersteller und kann für maximal 150000 Millionen Euro Programme einkaufen. Zur Installation und Wartung können maximal 10 Mitarbeiter herangezogen werden. Programmpaket A kostet beim Einkauf 16000 Euro, Paket B 15000 Euro, Paket C 20000 Euro und Paket D 30000 Euro. Für den Einsatz von A,B,C bzw. D werden 1, 4, 1 bzw. 2 Mitarbeiter benötigt. Der (Weiter)-Verkauf von A,B,C bzw. D bringt der Firma einen Gewinn von 4000 Euro, 6000 Euro, 8000 Euro bzw. 14000 Euro. Modellieren Sie die Aufgabe der Maximierung des Gesamtgewinns als lineares Programm.

2. Sie müussen zu vier Prüfungen in den Fächern A, B, C und D antreten und diese Prüfungen in der angegebenen Reihenfolge und innerhalb von 30 Tagen ablegen. Von heute ab gerechnet, ist der früheste Termin für die erste Prüfung in 30 Tagen, der späteste Termin für die letzte Prüfung ist in 60 Tagen. Für diese Prüfungen müssen Sie noch viel lernen. Aus vielerlei Gründen erscheint es sinnvoll, beim Lernen nicht zwischen den Fächern hin- und herzuspringen, sondern vier disjunkte Intervalle zu bestimmen, in denen jeweils für ein Fach gelernt wird. Auch das Lernen soll in der Reihenfolge A, B, C, D geschehen. Nun haben Sie sich aufgrund früherer Bemühungen in den Fächern verschieden gute Ausgangspositionen erarbeitet. Jetzt aus dem Stand heraus würden Sie in Fach A mit 2.0, in B mit 3.0, in C mit 5 und in D mit 4.5 abschneiden. Jeder in ein Fach investierte Lerntag bringt Ihnen eine Verbesserung, wenn das Lernen vor der Prüfung erfolgt: Für A ergibt sich eine Verbesserung von 0.2 pro Lerntag, für B von 0.25, für C von 0.1 und für D von 0.2. Nachteilig ist aber, dass Sie zwischen Abbruch der Lernerei in einem Fach und Prüfung in diesem Fach durch Vergessen und Verwirrung (weil Sie ja dann für ein anderes Fach lernen) pro Tag wieder 0.1 einbüßen.

   Hinweis: *Zur Vereinfachung möge die Diskretheit der Tage ignoriert und eine kontinuierliche Zeitachse verwendet werden. Außerdem gebe es keinerlei Beschränkungen für die Noten, die beliebige reelle Werte annehmen dürfen. Insbesondere gibt es keine bestmögliche Note und auch keine schlechtestmögliche Note.*

   Sie überlegen nun, wie Sie Ihre vier Prüufungstermine einlegen sollen und wann Sie für die einzelnen Fächer lernen sollen. Modellieren Sie dieses Problem als lineares Optimierungsproblem, wenn es dabei Ihr Ziel ist, dass

   (a) die schlechteste Note so gut wie möglich wird,
   (b) die Durchschnittsnote so gut wie möglich wird,
   (c) alle 4 Prüfungen bestanden werden.

3. Formulieren Sie die folgende Aufgabenstellung als *lineares* Programm (die Lösung ist nicht gefragt!):

   Die Firma Hokuspokus erzeugt Trampoline. Am Jahresbeginn ist für jedes der 12 Monate bekannt, wieviele Trampoline am Ende dieses Monats an die Zwischenhändler ausgeliefert werden sollen. Bezeichne d_i den Bedarf an Trampolinen am Ende von Monat $i = 1, \dots, 12$. Der Vektor $d = (d_i)$ sei wie folgt gegeben: $d = (30, 40, 20, 70, 80, 90, 100, 30, 150, 200, 150, 150)$. Trampoline, die in einem Monat produziert werden, können entweder am Ende dieses Monats ausgeliefert werden oder im Lager zur Auslieferung in einem späteren Monat gelagert werden. Die Lagerung eines Trampolins verursacht pro Monat Kosten von $c_1 = 100$ Euro. Zu Beginn des Jahres ist das Lager leer. Am Ende des Jahres muß das Lager ebenfalls wieder geleert sein. Weiters fallen in der Produktion Mengenanpassungskosten an, im Übergang zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Monaten. Diese Kosten berechnen sich wie folgt: Jede Anpassung der produzierten Menge nach oben oder unten verursacht pro Trampolin in der Über- oder Unterzahl Anpassungskosten von $c_2 = 40$ Euro. Ziel ist es, einen Produktions- und Lagerplan zu erstellen, der gewährleistet, daß die Gesamtkosten (Lagerkosten plus Produktionsanpassungskosten) minimiert werden.

4. **(Kraftwerkseinsatzplanung)**

Zur Stromversorgung einer Stadt stehen ein Grundlastkraftwerk G und ein Spitzenlastkraftwerk S zur Verfügung. Der Preis des von G gelieferten Stroms betrage c_g Geldeinheiten (GE) pro kWh und jener des von S gelieferten Stroms betrage c_s. Der Strombedarf in der i-ten Stunde sei b_i, $i = 1, \ldots, 24$. Die Stromliefermenge x_0 von G hat über alle 24 Stunden konstant zu bleiben, die Stromliefermenge von S kann stündlich variieren.

(a) Stellen Sie ein lineares Programm auf, das zum Ziel hat, den Strombedarf zu decken und die Stromkosten zu minimieren.

(b) Geben Sie Bedingungen für die Preise c_g und c_s an, sodaß die Lösung mit $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, 24$, (d.h. das Spitzenlastkraftwerk wird nicht verwendet) und $x_0 = \max_{i=1,\ldots,24} b_i$ eine Optimallösung des linearen Programms aus (4a) darstellt.

5. **(Auswahl eines Portfolios)**

Ein Portfolio Manager einer Bank hat 10 Millionen $ für Investitionen in Obligationen mit Nennwert 1000 $ jeweils zur Verfügung. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die zur Auswahl stehenden Obligationen sowie deren Kenndaten:

Name	Typ	Bewertung von Moody	Bewertung von Bank	Jahre bis zum Laufzeitende	Rendite (in%)	Rendite nach Steuerabzug (in %)
A	Gemeinde	Aa	2	9	8,6	8,6
B	Agentur	Aa	2	15	10,8	5,4
C	Staat	Aaa	1	4	10,0	5,0
D	Staat	Aaa	1	3	8,8	4,4
E	Gemeinde	Ba	5	2	9,0	9,0

Gemäß der Vorgaben seiner Vorgesetzten hat der Manager folgende Rahmenbedingungen bei der Auswahl eines Portfolios zu berücksichtigen:

- In Obligationen vom Typ Gemeinde dürfen maximal 3 Millionen $ investiert werden.
- Der durchschnittliche Qualitätsbewertungswert des Portfolios nach der Skala von Bank darf den Wert 1,4 nicht überschreiten. (Niedrige Werte bedeuten hohe Qualität auf dieser Skala.)
- Die durchschnittliche verbleibende Laufzeit bis zum Laufzeitende darf 5 Jahre nicht überschreiten.

(Hinweis: In den letzen beiden Restriktionen ist die jeweils investierte Summe zu berücksichtigen und in Relation zur insgesamt investierten Summe zu setzen.)

(a) Angenommen, die Obligationen werden zum Nennwert ("at par") gekauft und bis zum Ende der Laufzeit behalten. Formulieren Sie das Problem, ein Portfolio auszuwählen, das die obigen Einschränkungen erfüllt und das den Gesamtgewinn nach Steuerabzug maximiert, als lineares Programm. (Der Steuersatz beträgt 50%, aber die Gewinne aus kommunalen Obligationen sind steuerfrei.)

(b) Wie verändert sich das lineare Programm in (5a), wenn der Manager einen Kredit für bis zu 1 Million $ aufnehmen darf, für den der Zinssatz 11% vor Steuerabzug beträgt. (Effektiv führt dies zu einem Zinssatz von 5,5% mit dem der Manager rechnen muß.)

6. Welche der folgende Optimierungsprobleme können als lineare Programme formuliert werden? (Die Lösung ist nicht gefragt.)

(a)
$$\begin{array}{ll} \max & 3\,z_1 + 2\,z_2 + 4\,z_3 \\ \text{unter} & |\,z_1 + \,z_2 + \,z_3\,| = 2 \\ & z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 \le 4 \\ & z_1 \ge 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \min & 4 + |\,8\,x_1 - 2\,| + |\,x_1\,| \\ \text{unter} & x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ & x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 \le 4 \\ & x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - |x_2| + |x_3| \\ \text{unter} & x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ & x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 \le 4 \\ & x_1 \ge 0 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{ll} \max & 3\,x_1 - 5\,x_2 + 4\,x_3 \\ \text{unter} & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 10 \\ & |x_1 - 3x_2| \le 5 \\ & \dfrac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2} \le 4 \\ & 1 \le x_1 \le 5 \\ & x_2 \ge 0 \end{array}$$

7. (a) Zeichnen Sie die zulässige Menge Q (Polyeder in $\mathbb{R}^2$) des untenstehenden Problems und lösen Sie das Problem mit Hilfe der Zeichnung:

$$\begin{array}{lrrl} \text{minimiere } f(x) & 4x_1 + & 16x_2 & \\ \text{unter} & & & \\ & 5x_1 + & 2x_2 & \ge 10 \\ & x_1 + & x_2 & \ge 3 \\ & x_1 + & 5x_2 & \ge 5 \\ & -x_1 & & \ge -5 \\ & & -x_2 & \ge -5 \\ & & x_1, x_2 & \ge 0 \end{array}$$

(b) Bestimmen Sie alle Seiten von Q. Welche davon sind minimal?

(c) Eine wesentliche Erkenntnis der linearen Optimierung besagt Folgendes: *Bei einem linearen Optimierungsproblem dessen Optimallösung existiert und dessen zulässige Menge P mindestens eine Ecke besitzt, befindet sich unter den Optimallösungen auch eine Ecke, wobei eine Ecke eine Seite S des Polyeders P mit $\dim(S) = 0$ ist.* (Die Dimension wird im Sinne des entsprechenden affinen Unterraums definiert.) Bestimmen Sie rechnerisch eine Optimallösung des Problems aus (a) und begründen Sie ihren rechnerischen Ansatz.

8. Sei $P := P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \le b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Polyeder in $\mathbb{R}^n$. Ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ heißt *eine freie Richtung* von P, wenn es ein $\bar{x} \in P$ existiert, sodass $\{x \colon x = \bar{x} + \lambda d, \lambda \ge 0\} \subseteq P$ gilt. Eine frei Richtung von P heißt *extremal*, wenn sie nicht als Positivkombination zweier verschiedener freier Richtungen von P dargestellt werden kann. Zeigen Sie:

(a) $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ist eine freie Richtung von P genau dann, wenn $Ad \le 0$ ist.

(b) Bestimmen Sie die freien Richtungen der Mengen

$$M = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 - 2x_2 \ge -6, x_1 - x_2 \ge -2, x_1 + x_2 \ge 1, x \ge 0\}$$

und

$$N = M \cap \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \le x_2\}\,.$$

(c) Sei $m = n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Setze $z_i = -A^{-1}e_i$, for $i = 1, 2, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass die z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, genau die extremalen freien Richtungen von $P(A, b)$ sind.

9. Bestimmen Sie drei Seiten mit paarweise unterschiedlichen Dimensionen für das gegebene Polyeder P in $\mathbb{R}^3$:

$$P := \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 \le 1, x_2 - x_1 \le 0, x \ge 0\}\,.$$

10. Gegeben seien folgende Teilmengen des $\mathrm{I\!R}^3$:

   (a) $M_1 = \{\, x \in \mathrm{I\!R}^3 : \, |\mathrm{x}_1| \leq 1, |\mathrm{x}_2| \leq 1, |\mathrm{x}_3| \geq 1 \,\}$.

   (b) $M_3 = \{\, x \in \mathrm{I\!R}^2 : \, |\mathrm{x}_1| + |\mathrm{x}_2| \geq 1 \,\}$.

   (c) $M_4 = \{\, x \in \mathrm{I\!R}^2 : \, |\mathrm{x}_1| \leq |\mathrm{x}_2| \leq 1 \}$.

   Für welche dieser Mengen läßt sich eine Matrix A und ein Vektor b finden, sodaß die jeweilige Menge als $Ax \leq b$ beschrieben werden kann? (Geben Sie in jedem einzelnen Fall entweder eine solche Matrix und einen solchen Vektor an oder begründen Sie deren Nicht-Existenz.)