Mathematische Optimierung SS 2012

8. Übungsblatt

59. Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 + x_2 \\ \text{udNb.} & x_2 \leq 1 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & x_1\,, x_2 \geq 0 \end{array} .$$

Berechnen Sie den zentralen Pfad und stellen Sie ihn graphisch dar.

60. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{ll} \max & \cos\alpha\, x_1 + \sin\alpha\, x_2 \\ \text{udNb.} & x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} ,$$

wobei $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ein fester Parameter ist. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α den zentralen Pfad.

61. Berechnen Sie für das folgende lineare Programm den zentralen Pfad und stellen Sie ihn, sofern möglich, graphish dar. Bestimmen Sie ferner die beiden Grenzwerte $\lim_{\mu\to\infty}(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$ und $\lim_{\mu\to 0}(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$, wobei $\{(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_{mu}) : \mu > 0\}$ der zentrale Pfad des linearen Programms ist. Drücken Sie ferner die Dualitätslücke (*duality gap* - Differenz zwischen dem augenblicklichen primalen und dem augenblicklichen dualen Zielfunktionswert) in Abhängigkeit von μ dar.

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ \text{udNb.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} .$$

62. Für die folgenden linearen Programme führen Sie jeweils eine Iteration der pfadverfolgenden Methode aus. Starten Sie mit der Lösung $(x, w, y, z) = (e, e, e, e)$ und setzen Sie $\delta = \frac{1}{10}$ und $r = \frac{9}{10}$. Wie ändern sich die Optimalitätsmaße nach einer Iteration?

(a) $$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - 6x_2 \\ \text{udNb.} & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1\,, x_2\,, x_3 \geq 0 \end{array} ,$$

(b) $$\begin{array}{ll} \max & -x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \text{udNb.} & 2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1\,, x_2\,, x_3 \geq 0 \end{array} .$$

63. (Skalierungsinvarianz der pfadverfolgenden Methode)
Betrachen Sie das Paar (P, D) bestehend aus einem primalen Problem P und dem dazugehörigen dualen Problem D.

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \max & c^t x \\ \text{udNb.} & Ax + w = b \\ & x\,, w \geq 0 \end{array} , \qquad \text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \min & b^t y \\ \text{udNb.} & A^t y - z = c \\ & y\,, z \geq 0 \end{array} .$$

Seien R und S zwei gegebene Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen auf den jeweiligen Diagonalen. Betrachten Sie die skalierten Formulierungen der Probleme P und D wie folgt:

$$(\bar{P}) \quad \begin{array}{cc} \max & (Sc)^t\bar{x} \\ \text{udNb.} & RAS\bar{x} + \bar{w} = Rb \\ & \bar{x}\,, \bar{w} \geq 0 \end{array} \,, \qquad\qquad (\bar{D}) \quad \begin{array}{cc} \min & (Rb)^t y \\ \text{udNb.} & SA^tR\bar{y} - \bar{z} = Sc \\ & \bar{y}\,, \bar{z} \geq 0 \end{array} \,.$$

Sei $\left(x^{(k)}, w^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}\right)$ die Folge der von der pfadverfolgenden Methode generierten Punkte für das Paar (P, D). Analog sei $\left(\bar{x}^{(k)}, \bar{w}^{(k)}, \bar{y}^{(k)}, \bar{z}^{(k)}\right)$ die Folge der von der pfadverfolgenden Methode generierten Punkte für das Paar $(\bar{P}, \bar{D})$. Unter der Annhame der untenstehenden Relation zwischen den Startpunkten

$$\bar{x}^{(0)} = S^{-1}x^{(0)}\,, \;\; \bar{w}^{(0)} = Rw^{(0)}\,, \bar{y}^{(0)} = R^{-1}y^{(0)}\,, \;\; \bar{z}^{(0)} = Sz^{(0)}\,,$$

zeigen Sie, dass für jedes $k \geq 1$,

$$\bar{x}^{(k)} = S^{-1}x^{(k)}\,, \;\; \bar{w}^{(k)} = Rw^{(k)}\,, \bar{y}^{(k)} = R^{-1}y^{(k)}\,, \;\; \bar{z}^{(k)} = Sz^{(k)}\,,$$

gilt.

64. Sei $\{(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_{mu}) : \mu > 0\}$ der zentrale Pfad eines linearen Programms in seiner Standardformulierung (vgl. Vorlesung). Zeigen Sie, dass $\lim_{\mu\to\infty}(b^ty - c^tx) = \infty$ gilt.

65. Betrachten Sie ein lineares Programm dessen zulässiger Bereich beschränkt ist und ein nicht leeres Innere hat. Zeigen Sie, dass der zulässige Bereich des dualen Problems unbeschränkt ist. (Dazu kann zB. die Aussage von Beispiel 64 verwendet werden.)

66. Zeigen Sie: die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & 0 & I & 0 \\ 0 & A^t & 0 & -I \\ Z & 0 & 0 & X \\ 0 & W & Y & 0 \end{pmatrix},$$

(vgl. Vorlesung) ist regulär, wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \leq n$ vollen Rang hat.

67. Betrachen Sie das Paar (P, D) bestehend aus einem primalen Problem P und dem dazugehörigen dualen Problem D.

$$(\text{P}) \quad \begin{array}{cc} \max & c^tx \\ \text{udNb.} & Ax + w = b \\ & x\,, w \geq 0 \end{array} \,, \qquad\qquad (\text{D}) \quad \begin{array}{cc} \min & b^ty \\ \text{udNb.} & A^ty - z = c \\ & y\,, z \geq 0 \end{array} \,.$$

Zeigen Sie: Falls P einen nicht-leeren und beschränkten zulässigen Bereich hat, dann gibt es eine strikt positive zulässige Lösung (y, z) von D, d.h. $y_j > 0$, $\forall 1 \leq j \leq m$, und $z_i > 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$ (unter der Annahme, dass $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$).
Eventuell ist es einfacher folgende äquivalente Aussage zu beweisen: Wenn P zulässige Lösungen besitzt und es einen Index i, $1 \leq i \leq n$, oder einen Index j, $1 \leq j \leq m$, gibt, sodass $y_j = 0$ bzw. $z_i = 0$ für alle zulässigen Lösungen von D, dann ist der zulässige Bereich von P unbeschränkt.