Mathematische Optimierung SS 2012

6. Übungsblatt

41. Lösen Sie folgendes lineares Programm mit dem dualen Simplexverfahren:

$$\min \; 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & \geq & 6 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 10 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & \geq & 15 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Bestimmen Sie ferner eine Optimallösung, wenn die zusätzliche Restriktion $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 8$ eingeführt wird.

42. Die Mengen K_1 und K_2 seien wie folgt definiert:

$$K_1 := \{x : Ax = b, \; x \geq 0\}, \quad K_2 := \{u : u^t A \geq 0, \; u^t b < 0\}.$$

Zeigen Sie, daß genau eine der beiden Mengen K_1, K_2 nicht leer ist.

43. Beweisen Sie den folgenden Alternativsatz von Stiemke (1915):

Sei A eine reelle $m \times n$ Matrix mit $A \neq 0$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) Das System $Ax = 0$, $x > 0$ hat keine Lösung.

(b) Das System $A^t y \geq 0$, $A^t y \neq 0$ hat eine Lösung.

44. Beweisen Sie den folgenden Alternativsatz von Gordan (1873):

Sei A eine reelle $m \times n$ Matrix mit $A \neq 0$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) Das System $Ax = 0$, $x \geq 0$ besitzt eine nicht-triviale Lösung $x \neq 0$.

(b) Das System $A^t y > 0$ besitzt keine Lösung.

45. Betrachten Sei das untenstehende lineare Programm in Standardform

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^t x & & \\ \text{unter} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Für $b \in \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir mit $z^*(b)$ den optimalen Zielfunktionswert des obigen Programms. Es wird angenommen, dass $z^*(b) \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $f(b) = z^*(b)$ konkav ist, d.h. folgende Ungleichung gilt $\forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}^m$ und $\forall t \in [0, 1]$:

$$f\left(tb_1 + (1-t)b_2\right) \geq tf(b_1) + (1-t)f(b_2)\,.$$

46. Finden Sie streng komplementäre Optimallösungen zum untenstehenden linearen Programm P und seinem dualen Programm D:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & 4x_1 & + & 2x_2 & \le & 6 \\ & & & x_2 & \le & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \le & 3 \\ & & & x_1, x_2 & \ge & 0\,. \end{array}$$

47. Lösen Sie folgendes lineare Programm mit der selbst-dualen Simplexmethode.

$$\begin{array}{lrrcrcr} \max & - & x_1 & - & x_2 & & \\ & - & 2x_1 & - & x_2 & \le & 4 \\ & - & 2x_1 & + & 4x_2 & \le & -8 \\ & - & x_1 & + & 3x_2 & \le & -7 \\ & & x_1\,, & & x_2 & \ge & 0\,. \end{array}$$

48. Lösen Sie das untenstehende lineare Programm mit einem Verfahren ihrer Wahl. Sei $x^* \in \mathbb{R}^4$ eine optimale Lösung. Wir bezeichnen mit $c = (1,2,1,1)^T$ und $b = (8,12,18)^T$ die Vektoren der Koeffizienten in der Zielfunktion bzw. auf der rechten Seite der linearen Restriktionen. Ermitteln Sie für jedes c_i, $1 \le i \le 4$, bzw. b_j, $1 \le j \le 3$, das größtmögliche Intervall $[\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ bzw. $[\underline{b}_j, \bar{b}_j]$, sodass x^* eine optimale Lösung des linaren Programms bleibt, für alle Werte $c_i \in [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ bzw. $b_j \in [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\ \text{unter} & & & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & \le & 8 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & \le & 12 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & \le & 18 \\ & & & x_1\,, & & x_2\,, & & x_3\,, \; x_4 & \ge & 0\,. \end{array}$$

49. Betrachten Sie die folgende einparametrische Familie von linearen Programmen:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & (4-4\mu)x_0 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & & \\ \text{unter} & & & & & & & & & & & \\ & x_0 & - & x_1 & & & & & & & \le & 1 \\ & x_0 & & & - & x_2 & & & & & \le & 2 \\ & x_0 & & & & & - & x_3 & & & \le & 4 \\ & x_0 & & & & & & & - & x_4 & \le & 8 \\ & & & & & x_0\,, \; x_1\,, & & x_2\,, \; x_3\,, & & x_4 & \ge & 0\,. \end{array}$$

Verwenden Sie das paramterische Simplexverfahren um eine optimale Lösung des Problems $\forall \mu \in (-\infty, +\infty)$ zu ermitteln, beginnend mit $+\infty$.