Mathematische Optimierung SS 2012

4. Übungsblatt

28. Betrachten Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & 2\,x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

   (a) Stellen Sie die zulässige Menge graphisch dar.

   (b) Lösen Sie das Problem mit dem Simplexverfahren und geben Sie die geometrische Interpretation jedes Schrittes an (vgl. Vorlesung).

   (c) Zeigen Sie (auch) anhand graphischer Überlegungen, dass die optimale Lösung entartet ist.

   (d) Welche Restriktion kann entfernt werden, um eine nicht entartete optimale Lösung zu erhalten? Begründen Sie ihre Antwort anhand graphischer Überlegungen.

29. Lösen Sie das folgende lineare Programm mit Hilfe des revidierten Simplexverfahrens:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & 2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\ & 2\,x_1 & & & + & x_3 & \leq & 4 \\ & & & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} \end{array}$$

30. **(Das Klee-Minty Problem)**.
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Das folgende lineare Programm ist bekannt als Klee-Minty Problem in n Variablen:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j \\ \text{unter} & \\ & x_1 \leq 1 \\ & \left(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j\right) + x_i \leq 100^{i-1}\,, \quad i = 2, \ldots, n \\ & x_i \geq 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

   (a) Lösen Sie das Klee-Minty Problem für $n = 3$ mit Hilfe des Simplexverfahrens, wobei in jeder Iteration die Spalte mit dem größten reduzierten Kostenkoeffizienten als Pivotspalte gewählt wird (d.h. die Pivotsplalte wird mit der Methode des steilsten Anstiegs im Raum der Nichtbasisvariablen bestimmt).

   (b) Lösen Sie das Klee-Minty Problem für $n = 3$ mit Hilfe des Simplexverfahrens, wobei die Auswahl der Pivotspalte mit der Methode des größten absoluten Zuwachses erfolgen soll.

   (c) Lösen Sie das Klee-Minty Problem für $n = 3$ mit Hilfe des revidierten Simplexverfahrens unter Anwendung der LU-Zerlegung.

31. Sei x_{n+i} die Schlupfvariable zur i-ten Restriktion des Klee-Minty Problems aus Übungsbeispiel 30. Zeigen Sie, dass für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ in jeder zulässigen Basis genau eine der zwei Variablen x_i, x_{n+i} enthalten ist.

32. **(Für Ambitionierte.)**
Zeigen Sie mit Hilfe der Aussage aus Übungsbeispiel 31 und vollständiger Induktion, dass das Simplexverfahren mit der Methode des steilsten Anstiegs im Raum der Nichtbasisvariablen genau $2^n - 1$ Iterationen zur Lösung des Klee-Minty Problems in n Variablen benötigt.

Hinweis: Sei $m_i^{(k)}$ der Wert des zur Nichtbasisvariable aus $\{x_i, x_{n+i}\}$ gehörenden reduzierten Kostenkoeffizienten nach Iteration k. Es kann gezeigt werden, dass $\left|m_i^{(k)}\right| = 10^{n-i}$ gilt, für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ und für alle Iterationenindizes k. Es kann weiters gezeigt werden, dass von Iteration zur Iteration höchstens zwei der Koeffizienten m_i ihr Vorzeichen ändern.