Mathematische Optimierung SS 2012

3. Übungsblatt

21. Lösen Sie das folgende lineare Programm

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\max & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 4 \\
 & 2\,x_1 & & & + & 3\,x_3 & \leq & 5 \\
 & 2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \\
 & 4\,x_1 & & & + & 4\,x_3 & \leq & 11 \\
 & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

   (a) mit der lexikographischen Zeilenauswahlregel,

   (b) mit der Regel von Bland.

22. Lösen Sie das lineare Programm:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 6
\end{array}
$$

$$1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 10$$

   Behandeln Sie die unteren und oberen Schranken nicht als explizite Restriktionen. Wie lassen sich untere Schranken schon vor Start des Simplexverfahrens leicht aus der Welt schaffen und auf den Standardfall der Vorzeichenbeschränkung zurückführen?

23. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rc}
\min & c^t x + d^t y \\
\text{unter} & Ax + By \leq b \\
 & y_i = |x_i| \text{ für alle } i
\end{array}
$$

   Alle Einträge der Matrix B und des Vektors d seien nichtnegativ.

   (a) Formulieren Sie dieses Optimierungsproblem als lineares Programm.

   (b) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Formulierung. (D.h. zeigen Sie daß die beiden Probleme vom Gesichtspunkt der Existenz einer zulässigen Lösung und vom Gesichtspunkt des optimalen Zielfunktionswerts äquivalent sind.

   (c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, daß wenn die Matrix B negative Einträge enthalten kann, lokale Optima auftreten können, die keine globalen Optima sind. Was läßt sich daraus für die Formulierbarkeit des gegebenen Problems als lineares Programm besagen, wenn keine Vorzeicheneinschränkungen an B gemacht werden.

24. Formulieren Sie folgende Aufgaben als lineare Programme:

   (a) Bestimmen Sie für ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1 das größte enthaltene Quadrat.

   (b) Bestimmen Sie für ein Quadrat mit Seitenlänge 1 das kleinste umschließende gleichseitige Dreieck.

25. **Sensitivitätsanalyse.**

(a) Betrachten sie eine Basislösung x des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$, die zur Basis B gehört. Wie ändert sich x, wenn die rechte Seite des linearen Programms sich von b auf $b + t$ ändert, aber die Basis B beibehalten wird? Wie ändert sich die Zielfunktion?

(b) Gegeben sei eine nichtentartete Basislösung x des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$ ist, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodaß gilt: Wenn $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$, dann ist die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t, x \geq 0 \,\}$ zulässig.

(c) Gegeben sei eine optimale Basislösung x^* des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Wenn die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t,\ x \geq 0 \,\}$ zulässig ist, dann ist sie für dieses lineare Programm optimal.

(d) Zeigen Sie: Wenn x^* eine nichtentartete optimale Basislösung mit Optimalwert z^* des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \,\}$ ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß gilt: Der Optimalwert des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t,\ x \geq 0 \,\}$ läßt sich im Bereich $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$ in der Form

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} \pi_i t_i$$

mit geeigneten Koeffizienten π_i darstellen.

26. (a) Formulieren Sie folgendes Problem als lineares Programm (oder als zwei lineare Programme): Für zwei gegebene endliche Mengen von Punkten in der Ebene soll eine Gerade berechnet werden, die die beiden Mengen trennt.

(b) Formulieren Sie dasselbe Problem in beliebigen Dimensionen. Die beiden Mengen von Punkten sollen durch eine Hyperebene getrennt werden. Wie viele Variablen hat Ihr lineares Programm?

27. (Satz von Carathéodory). Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ eine beliebige Menge. Zeigen Sie:

$$x \in \operatorname{conv}(S) \Longrightarrow \quad \exists x_1, \dots, x_{n+1} \in S \text{ sodaß } x \in \operatorname{conv}(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

Dieser Satz besagt also, daß sich jeder Punkt der konvexen Hülle einer Menge S durch eine Konvexkombination von höchstens $n + 1$ Punkten aus S darstellen läßt.

Gegeben seien die Eckpunkte x_i eines Vierecks im $\mathbb{R}^2 : \mathrm{x}_1 = (0,0), \mathrm{x}_2 = (4,1), \mathrm{x}_3 = (2,6), \mathrm{x}_4 = (0,3)$. Stellen Sie den Schwerpunkt $s = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i$ als Konvexkombination von höchstens 3 Eckpunkten dar.