# Mathematische Optimierung SS 2012

## 2. Übungsblatt

12. Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform der Form $\max c^t x$ unter $Ax \leq b$, $x \geq 0$ sowie das folgende zugehörige Tableau mit der Basis $B = (x_3, x_4, x_6)$.

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| | 10 | $c_1$ | $c_2$ | 0 |
| $x_3$ | $b_1$ | 4 | $a_1$ | $a_2$ |
| $x_4$ | 2 | $-1$ | $-5$ | $-1$ |
| $x_6$ | 3 | $a_3$ | $-3$ | $-4$ |

Für welche Wahl der Parameter $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $c_1$ und $c_2$ gelten die folgenden Aussagen?

(a) $B$ ist nicht zulässig.

(b) $B$ ist zulässig, aber entartet.

(c) $B$ ist zulässig, aber nicht optimal.

(d) $B$ ist optimal.

(e) $B$ ist zulässig, aber das Problem besitzt keine endliche Optimallösung.

(f) $B$ ist optimal, aber die Optimallösung ist nicht eindeutig?

(g) $B$ ist zulässig, aber durch Austausch der Basisvariablen $x_6$ gegen $x_1$ ergäbe sich eine Verbesserung?

(h) Wird $x_2$ in die Basis aufgenommen und $x_3$ im Gegenzug aus der Basis entfernt, so erhält man eine neue zulässige Basis mit einem Zielfunktionswert $< 10$.

13. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Für wahre Aussagen ist ein Beweis anzugeben und für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel.

(a) Gegeben sei ein lineares Programm mit redundanten Restriktionen. Das lineare Programm, das durch Wegwerfen aller redundanten Restriktionen resultiert, ist äquivalent zum ursprünglichen Problem. (Eine Restriktion wird als redundant bezeichnet, wenn das lineare Programm, das sich durch Weglassen dieser einen Restriktion ergibt, äquivalent zum Ausgangsproblem ist.)

(b) Gegeben sei ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen (Vorzeichenbedingungen werden hier nicht mitgezählt), einer Gleichungsrestriktion und $n$ Variablen. Dieses lineare Programm läßt sich stets in ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen und $n-1$ Variablen überführen (indem eine Variable aus der Gleichung ermittelt und in das Restproblem eingesetzt wird).

(c) Gegeben sei ein lineares Programm P in 2 Variablen, das eine degenerierte Basislösung besitzt. Dann beinhaltet P eine redundante Restriktion.

(d) Die Maximierung der Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 < 0 \\ 4x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

läßt sich mit Hilfe einer linearen Formulierung in ein lineares Programm integrieren.

(e) Analog zu Aufgabe 13d für die Minimierung dieser Zielfunktion.

14. Die Koeffizientenmatrix $A$ und der rechte Seiten Vektor $b$ eines linearen Programms seien wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß die ersten drei Spalten von $A$ eine Basislösung von $Ax = b$ liefern. Bestimmen Sie durch Pivotoperationen die restlichen Basislösungen, und prüfen Sie, welche davon entartet, bzw. zulässig sind für das System $\{ x : Ax = b, x \geq 0 \}$.

15. Folgendes Tableau ergab sich als Zwischenstufe bei der Lösung von $\min c^t x$ unter $Ax = b, x \geq 0$ mit Hilfe der Simplexmethode:

| | | $x_2$ | $x_3$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| | -8 | 8/3 | -11 | 4/3 |
| $x_1$ | 4 | 2/3 | 0 | 4/3 |
| $x_4$ | 2 | -7/3 | 3 | -2/3 |
| $x_6$ | 2 | -2/3 | -2 | 2/3 |

$B = \{1, 4, 6\}$ ist die augenblickliche Basis.

(a) Drücken Sie die augenblicklichen Nichtbasisvariablen, die Zielfunktion und die Nebenbedingungen durch die augenblicklichen Basisvariablen aus.

(b) Welche Pivotoperation muß als nächstes folgen?

(c) Rekonstruieren Sie das ursprüngliche Problem, falls folgendes noch bekannt ist:

$$c_1 = 1 \qquad c_4 = 3 \qquad A_B^{-1} = (a_1, a_4, a_6)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Gegeben sei das folgende lineare Programm P:

$$\max 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 15x_4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & \leq & 36 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & \geq & -72 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 24 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \quad \geq 0.$$

(a) Bestimmen Sie eine Optimallösung von P und geben Sie den zugehörigen Zielfunktionswert an.

(b) Ist die in (a) gefundene optimale Lösung eindeutig? (Begründung!)

(c) Welche der Restriktionen des Problems P können gestrichen werden, ohne die Optimallösung zu verändern? (Begründung!)

(d) Auf welchen Wert kann der Zielfunktionskoeffizient von $x_1$ höchstens erhöht bzw. gesenkt werden, ohne die Optimallösung zu verändern?

17. (**Pivots per WWW, dieses Beispiel ist nicht ankreuzbar!**)
Navigieren Sie auf die folgende WWW-Seite (Java muß aktiviert sein, damit das Tool funktioniert): `http://campuscgi.princeton.edu/~rvdb/JAVA/pivot/primal_x0.html` und lesen sich den Anleitungstext der Aufgabe durch. Wählen Sie 5 als Zeilenzahl, 4 als Spaltenzahl, 542 als Seed und 2 als Anzahl der Probleme und lösen Sie die resultierenden linearen Programme durch Angabe der Folge der Pivotschritte. (Beachten Sie die benutzte Form der linearen Programme und achten Sie auf die richtige Interpretation der Zahlen. Wenn Sie weitere Erklärungen zum Datenformat

brauchen, lesen Sie die Erläuterungen zur Simplexmethode im von Robert Vanderbei on-line zur Verfügung gestellten Kurzskriptum zu seiner Vorlesung lineare Optimierung. Sie erreichen diesen File direkt über `http://www.princeton.edu/~rvdb/542/lectures/lec2.pdf` oder durch Navigation über die Hauptseite.) Es ist nicht nötig, die e-mail Adressfelder auszufüllen. Sie sollten sich aber mit diesem Pivottool vertraut machen. Weitere Tools dieser Art finden sich auf der Seite `http://www.princeton.edu/~rvdb`.)

18. Lösen Sie das lineare Programm mit Hilfe des Simplexverfagrens:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

19. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \min & 9x_1 & + & 16x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & & \\ \text{unter} & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & -10 \\ & x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & \geq & 5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

(a) Lösen Sie dieses lineare Programm mit dem Simplexverfahren ausgehend von der Basislösung, die zu $B = (2, 3)$ gehört.

(b) Lösen Sie dieses lineare Programm mit der Zweiphasenmethode von Dantzig.

20. Wieviele zulässige Basislösungen haben die folgenden linearen Programme:

(a) $\max x_1$ unter $0 \leq x_i \leq 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

(b) $\max x_n$ unter $\alpha \leq x_1 \leq 1$ und $\alpha x_i \leq x_{i+1} \leq 1 - \alpha x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Hierbei ist $\alpha$ eine fix gewählte Zahl in $(0, \frac{1}{2})$.

Veranschaulichen Sie Ihre Resultate für die Fälle $n = 1, 2, 3$.