Mathematische Optimierung SS 2012
10. Übungsblatt

71. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines zusammenhängenden gerichteten Graphen G und $\tilde{A}$ die Matrix, die aus A entsteht, wenn eine Zeile von A z.B. die Letzte, entfernt wird. Sei $B \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ eine quadratische Teilmatrix von $\tilde{A}$. Zeigen Sie: Wenn B regulär, dann bilden die den Spalten von B entsprechenden Kanten in G einen Spannbaum.

72. Betrachten Sie das Netzwerk in Abbildung 1 und den darin angegebenen Spannbaum, bestehend aus den dick gezeichneten Kanten. Die Zahlen an den Knoten geben die Angebots- und Bedarfswerte an (Angebotswerte sind positiv), die Zahlen an den Kanten geben die Kosten an (vgl. Vorlesung). Berechnen Sie die zu diesem Baum gehörende primal-duale Basislösung sowie die dualen Schlupfvariablen.

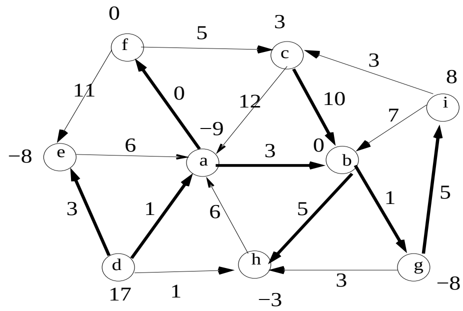

Abbildung 1: Netzwerk für Beispiel 72

73. Betrachten Sie die Baumlösung des Flussproblems im Netzwerk in Abbildung 2; die Zahlen an den dicken Baumkanten geben die Flusswerte an. Die Zahlen an den dünnen Kanten geben die Werte der dualen Schlupfvariablen an. Führen Sie eine Iteration des dualen Netzwerk Simplexverfahrens durch (vgl. Vorlesung) und geben Sie die Baumlösung nach dieser Iteration an. Werden die Werte der dualen Variablen y für die Aktualisierung der Flusswerte bzw. der Werte der Schlupfvariablen benötigt?

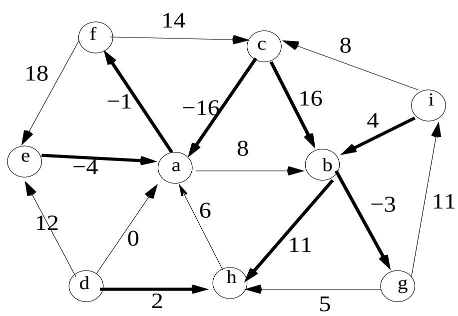

Abbildung 2: Netzwerk für Beispiel 73

74. Betrachten Sie die Baumlösung des Flussproblems im Netzwerk in Abbildung 3; die Zahlen an den dicken Baumkanten geben die Flusswerte an. Die Zahlen an den dünnen Kanten geben die Werte der dualen Schlupfvariablen an. Führen Sie eine Iteration des primalen Netzwerk Simplexverfahrens durch (vgl. Vorlesung) und geben

Sie die Baumlösung nach dieser Iteration an. Werden die Werte der dualen Variablen y für die Aktualisierung der Flusswerte bzw. der Werte der Schlupfvariablen benötigt?

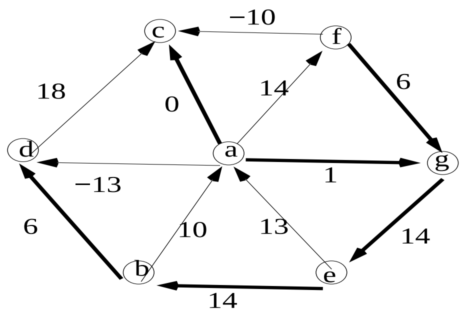

Abbildung 3: Netzwerk für Beispiel 74

75. Betrachten Sie die Baumlösung des Flussproblems im Netzwerk in Abbildung 4, wobei t ein Paramter ist. Die Zahlen an den dicken Baumkanten geben die Flusswerte an. Die Zahlen an den dünnen Kanten geben die Werte der dualen Schlupfvariablen an. Die Zahlen an den Knoten geben die Werte der dualen Variablen an.

   (a) Für welche Werte von t ist diese Baumlösung optimal?

   (b) Führen Sie eine Iteration eines selbstdualen Netzwerk Simplexverfahrens durch und geben Sie die Baumlösung nach dieser Iteration an.

   (c) Für welche Werte des parameters t ist die neue Baumlösung optimal?

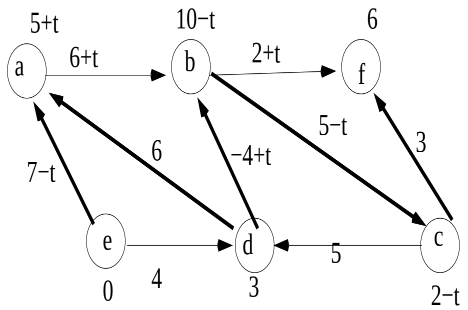

Abbildung 4: Netzwerk für Beispiel 75

76. Gegeben sei das folgende binäre Rucksackproblem:

$$\max\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5$$

unter

$$6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 \leq 19.$$

Lösen Sie es (i) mit dynamischer Optimierung und (ii) mit *Branch and Bound*, wobei zur Schrankenberechnung die lineare Relaxation, also $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$, verwenden werden soll.

77. Lösen Sie das folgende Transportproblem mit folgenden Angebot- und Bedarfvektoren:

$$a = (6, 25, 20, 13) \qquad b = (4, 16, 10, 9, 7, 18)$$

und der Kostenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 12 & 1 & 12 & 8 \\ -3 & 2 & 6 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 10 & 2 & 1 \\ 10 & -2 & 5 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

unter Verwendung eines Netzwerk Simplexverfahrens.

78. Lösen Sie das folgende ganzzahlige Programm mit der Branch & Boundmethode:

$$\begin{array}{llcll} \min & -x_1 & - & x_2 & \\ \text{s.t.} & -x_1 & + & 2x_2 & \leq 5 \\ & 9x_1 & + & 4x_2 & \leq 18 \\ & 4x_1 & - & 2x_2 & \leq 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$$

wobei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

79. Entwerfen Sie ein dynamisches Programmierverfahren für das Rundreiseproblem:

Gegeben sind n Städte und eine $n \times n$ Distanzmatrix C und gesucht ist eine Rundreise (=zyklische Permutation) ϕ, die die Kosten $\sum_{i=1}^{n} c_{i\phi(i)}$ minimiert. Hinweis: Führen Sie die Größen $F[i, S]$ mit $S \subset \{1, \ldots, n\}$ und $i \in S$ ein. $F[i, S]$ gibt die Länge des kürzesten Weges an, der alle Städte in S genau einmal besucht (und keine anderen Städte) und als letzte Stadt die Stadt i besucht. Überlegen Sie, wie die Berechnung dieser Größen mittels dynamischer Programmierung organisiert werden kann und wie man mit Hilfe dieser Größen die Optimallösung des Rundreiseproblems bestimmen kann.