Mathematische Optimierung SS 2012
1. Übungsblatt

1. **Mischungsproblem:** Ein Ernährungswissenschaftler möchte ein neues Mehrkornmehl entwickeln. Es stehen vier Ausgangskorntypen zur Verfügung, aus denen das neue Mehl gemischt werden soll. Diese vier Typen zeichnen sich durch die folgenden Charakteristika aus:

	% im Korn v. Typ			
	1	2	3	4
Stärke	30	20	40	25
Faseranteile	40	65	35	40
Eiweiß	20	15	5	30
Gluten	10	0	20	5
Kosten (S pro kg)	7	4	6	8

Bei der Zusammenstellung des neuen Mehles ist auf die Einhaltung der folgenden Vorschriften zu achten:

- Aus geschmacklichen Gründen darf der Anteil des 2. Korntypes 20% nicht überschreiten. Ferner hat der Anteil des 3. Types mindestens 30% zu betragen und der Anteil des 1. Typs hat zwischen 10% und 25% zu liegen.
- Der Eiweißgehalt des neuen Mehles hat mindestens 18% zu betragen. Der Glutengehalt muß zwischen 8% und 13% betragen und der Faseranteil darf maximal 50% ausmachen.

Modellieren Sie die Aufgabe, aus den vier gegebenen Korntypen ein neues Mehl unter Beachtung der obigen Vorschriften mit dem Ziel der Kostenminimierung zu mischen, als lineares Programm. (Die Lösung ist nicht gefragt.)

2. Eine Genossenschaft verfügt über 1000 Quadratkilometer Ackerland, die für den Anbau von Weizen, Roggen und Sojabohnen zur Verfügung stehen. Die Bewirtschaftung der Felder verlangt den Einsatz der nur begrenzt vorliegenden Ressourcen Wasser, Arbeitskraft und Geld. Maximal stehen 2 Kubikmeter Wasser, 8000 Arbeitsstunden sowie 20000 $ an Budget zur Verfügung. Ferner sind folgende Randbedingungen zu beachten:

- Pro km^2 an Land können 10t Roggen, 4t Weizen bzw. 6t Sojabohnen angebaut werden.
- Pro km^2 an Land benötigt man für Roggen 3 l Wasser, für Weizen 1 l und für Sojabohnen 2 l.
- Die Bebauung mit Roggen kostet pro km^2 15 $, mit Weizen 10 $ und mit Sojabohnen 12 $.
- Die Bebauung mit Roggen erfordert pro km^2 8 Arbeitsstunden, jene mit Weizen 6 und jene mit Sojabohnen 10.
- Der Profit pro produzierter Tonne beträgt für Roggen 10 $, für Weizen 6 $ und für Sojabohnen 8 $.

Modellieren Sie die Aufgabe einen Bebauplan zu finden, der den Profit maximiert und alle Bedingungen einhält, als lineares Programm.

3. **Verschnittminimierung:** Die Firma“Gaulberger” erzeugt Leichtmetallfenster. Für einen Großauftrag benötigt die Firma Stäbe in folgenden Längen und Stückzahlen.

Stab	Länge (cm)	Stück
A	181	18
B	174	150
C	155	10
D	134	100

Als Rohmaterial stehen nur Stäbe in einer Länge von 6 Metern zur Verfügung. Modellieren Sie die Aufgabe die Minimalanzahl an 6 Meter Stäben, die für den Auftrag notwendig sind, zu ermitteln als lineares Programm.

Wie ändert sich das Modell, falls in der Firma noch 10 Stäbe mit 3.2 Metern Länge verfügbar sind?

4. **Personaleinsatzplanung:** Ein Postamt benötigt an verschiedenen Wochentagen eine unterschiedliche Anzahl von Postbeamten. Langjährige Beobachtungen ergaben folgenden Bedarf.

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
17	13	15	19	14	16	11

Kollektivvertragliche Regelungen erfordern, daß jeder Angestellte 5 Tage arbeitet, und die zwei darauffolgenden Tage frei hat.

(a) Erstellen Sie ein Modell, mit dem ermittelt werden kann, wieviele Angestellte mindestens notwendig sind, um den Betrieb aufrechtzuerhalten.

(b) Angenommen, das Postamt verfügt über 25 Beamte und es können weder Neueinstellungen noch Kündigungen vorgenommen werden. Formulieren Sie das Problem, unter den gegebenen Bedingungen einen Arbeitsplan zu bestimmen, bei dem möglichst viele Beamte einen Wochenendtag (Samstag, Sonntag) frei haben, als lineares Programm.

(c) Angenommmen, es besteht die Möglichkeit von seiten der Postdirektion, einen kleinen Anteil der Beschäftigten zu veranlassen, auf einen freien Tag zu verzichten, und 6 Tage hintereinander zu arbeiten. Dabei werden für die ersten fünf Tage jeweils S 1000/ Tag und am sechsten Tag S 1400 bezahlt. Es können allerdings aufgrund einer gewerkschaftlichen Übereinkunft höchstens 20 % aller Beschäftigten für die Aufgabe eines freien Tages veranlasst werden. Wie ändert sich dann das Modell?

5. Gegeben sei eine Zufallsvariable Y, die die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ annehmen kann. Wir wissen, daß Y entweder die Verteilung 1 besitzt, wobei

$$P(Y = a_i) = p_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

gilt oder die Verteilung 2 wobei dann

$$P(Y = a_i) = q_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

gilt. Es gilt $0 \leq p_i, q_i \leq 1$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$. Basierend auf einer einzigen Beobachtung von Y möchten wir raten, welche der beiden Verteilungen vorliegt. D.h., für jede mögliche Realisierung a_j von Y entscheiden wir mit einer Wahrscheinlichkeit von x_j, daß Y entsprechend der ersten Verteilung verteilt ist und mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - x_j$, daß die zweite Verteilung vorliegt. Ziel ist es, die Ratewahrscheinlichkeiten x_j, $j = 1, \ldots, n$, so zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß in Wirklichkeit Verteilung 2 vorliegt, wenn wir uns auf Verteilung 1 festlegen, nicht größer als eine gegebene Schranke von $\beta < 1$ ist. Unter Einhaltung dieser Bedingung sollen die x_j so bestimmt werden, daß die Wahrscheinlichkeit, daß tatsächlich Verteilung 1 vorliegt, wenn wir uns auf Verteilung 1 festlegen, maximiert wird.

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

6. Beim *Fahrradproblem* möchten n Personen, die über ein einziges einsitziges Fahrrad verfügen, einen 10 Kilometer langen Weg zurücklegen. Für jede Person $j = 1, \ldots, n$ ist die Gehgeschwindigkeit g_j und die Radfahrgeschwindigkeit f_j bekannt. Die Ankunftszeit der letzten ankommenden Person soll minimiert werden.

(a) Versuchen Sie das Problem für $n = 3$, $g_1 = 4$, $g_2 = g_3 = 2$, $f_1 = 16$, $f_2 = f_3 = 12$ zu lösen. (Geschwindigkeiten in km/h).

(b) Zeigen Sie, dass der Optimalwert des folgenden linearen Programms eine untere Schranke für den Optimalwert des Fahrradproblems liefert:

$$
\begin{array}{rrll}
\text{minimiere} & t & & \\
\text{unter} & t - x_j - x'_j - y_j - y'_j \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \\
& t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y'_j \geq & 0 & \\
& g_j x_j - g_j x'_j + f_j y_j - f_j y'_j = & 10 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} f_j y_j - \sum_{j=1}^{n} f_j y'_j \leq & 10 & \\
& x_j, x'_j, y_j, y'_j \geq & 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Was bedeuten die Variablen x_j, x'_j, y_j, y'_j?

(c) (Zum Tüfteln) Finden Sie ein Beispiel, bei dem der Optimalwert des linearen Programms vom Optimalwert des Fahrradproblems verschieden ist.

7. Betrachten Sie die folgenden linearen Optimierungsprobleme und geben Sie gegebenenfalls jeweils eine äquivalente Formulierung in der Standardform an:

(a)
$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3x_1 & - & 5x_2 & & \\
\text{udNb.} & & & & & \\
& 4x_1 & + & 5x_2 & \geq & 3 \\
& 6x_1 & - & 6x_2 & = & 7 \\
& x_1 & + & 8x_2 & \leq & 20 \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

(b)
$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 3x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & & \\
\text{udNb.} & & & & & & & & & \\
& 9x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & \geq & 5 \\
& 8x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & = & 7 \\
& & & & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

8. Gegeben seien folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

(a) $M_1 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |\mathrm{x}_1| \leq 1, |\mathrm{x}_2| \leq 1, |\mathrm{x}_3| \leq 1 \}$.

(b) $M_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq \mathrm{x}_1 \leq \mathrm{x}_2 \leq \mathrm{x}_3 \leq 1 \}$.

(c) $M_3 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |\mathrm{x}_1| + |\mathrm{x}_2| + |\mathrm{x}_3| \leq 1 \}$.

(d) $M_4 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |\mathrm{x}_1| \leq |\mathrm{x}_2| \leq |\mathrm{x}_3| \leq 1$.

Für welche dieser Mengen läßt sich eine Matrix A und ein Vektor b finden, sodaß die jeweilige Menge als $Ax \leq b$ beschrieben werden kann? (Geben Sie in jedem einzelnen Fall entweder eine solche Matrix und einen solchen Vektor an oder begründen Sie deren Nicht-Existenz.)

9. Welche der folgende Optimierungsprobleme können als lineare Programme formuliert werden? (Gemeint ist hier, daß man die Aufgabenstellungen mit Hilfe eines linearen Programms lösen kann. Die Lösung ist hier aber nicht gefragt.)

(a)
$$
\begin{array}{lrcl}
\min & \max\{z_1, z_2, z_3\} & & \\
\text{unter} & z_1 + z_2 + z_3 & = & 5 \\
& z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 & \leq & 4 \\
& z_1, z_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

(b)
$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 3\,z_1 + 2\,z_2 + 4\,z_3 & & \\
\text{unter} & |\,z_1 + z_2 + z_3\,| & = & 2 \\
& z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 & \leq & 4 \\
& z_1 & \geq & 0
\end{array}
$$

(c)
$$
\begin{array}{lrcl}
\min & |x_1| + |x_2| + |x_3| & & \\
\text{unter} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 5 \\
& x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 & \leq & 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} & &
\end{array}
$$

(g)
$$
\begin{array}{ll}
\max & 3\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + 6\,x_4 - x_5 - 2\,x_6 + 4\,x_7 \\
\text{unter} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \leq 1/2 \\
& \max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \leq \min\{x_5, x_6, x_7\} \\
& 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \leq 1
\end{array}
$$

10. Betrachten Sie das lineare Programm

$$\begin{array}{rrrl} \text{maximiere} & x_1+ & x_2 & \\ \text{unter} & sx_1+ & tx_2 & \leq 1 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Für welche Werte der Parameter s und t

(a) hat es eine Optimallösung?
(b) hat es eine eindeutige Optimallösung?
(c) ist es unzulässig?
(d) ist es unbeschränkt?

11. Seien $A \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$, $c \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$ und $b \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}}$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn das lineare Optimierungsproblem $\max\{c^t x \colon x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}, \mathrm{Ax} \leq \mathrm{b}, \mathrm{x} \geq 0\}$ unbeschränkt ist, dann gibt es mindestens einen Index $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sodass das lineare Optimierungsproblem $\max\{x_k \colon x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}, \mathrm{Ax} \leq \mathrm{b}, \mathrm{x} \geq 0\}$ unbeschränkt ist.