Beispiel zum Branch and Bound Verfahren

$$\max \quad 7x_1 + 2x_2$$

u.d.N.B.

$$(GLP) \qquad \begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 20 \\ -2x_1 - 2x_2 &\leq -7 \\ x = (x_1, x_2) &\in \mathbb{Z}_+^2 \end{aligned}$$

$$(LP) \quad \max \{ 7x_1 + 2x_2 : Ax \leq b, \; x \in \mathbb{R}_+^2 \}$$

mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ -7 \end{pmatrix}$

Optimales Simplex Tableau für LP

		x_3	x_4
	$-\frac{332}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$-\frac{16}{11}$
x_1	$\frac{36}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$
x_2	$\frac{40}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$
x_5	$\frac{75}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{6}{11}$

$$x^{(0)} = \left(\frac{36}{11}, \frac{40}{11}, 0, 0, \frac{75}{11} \right)$$

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \notin \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow N^{(0)} = \{1, 2\}$$

Wir setzen $D_j^{-(0)} = f_j^{(0)} \qquad D_j^{+(0)} = 1 - f_j^{(0)} \qquad j = 1,2$

(Branching kriterium <u>maximum infeasibility</u>)

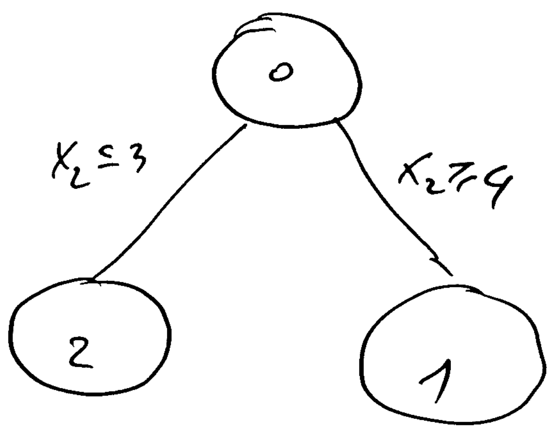
$$\max_{j \in \{1,2\}} \min \{ D_j^{-(0)}, D_j^{+(0)} \} = \max \{ \min \{ \underline{\tfrac{3}{11}}, \tfrac{8}{11} \}, \min \{ \tfrac{7}{11}, \underline{\underline{\tfrac{4}{11}}} \} \}$$

$$= \max \{ \tfrac{3}{11}, \underline{\underline{\tfrac{4}{11}}} \}$$

Also $j = 2$ ist branching Variable

$x_2 \le \lfloor x_2^{(0)} \rfloor$ bzw $x_2 \ge \lceil x_2^{(0)} \rceil$

$x_2 \le 3$ bzw. $x_2 \ge 4$



Knotenauswahl:
Wähle Knoten mit
$\min\{D_2^-, \underline{D_2^+}\}$ also
den rechten Knoten (Knoten 1)

LP1 $\max\{7x_1 + 2x_2 : Ax \le b, \; x_2 \ge 4, \; x \in \mathbb{R}_+^2\}$

$x_2 \ge 4 \iff x_2 - s = 4$ mit $s \ge 0$

Duales Simplexverfahren zur Lösung von LP1 mit Startlösung (Starttableau) $x^{(0)}$

	$-\frac{332}{11}$	x_3: $-3/11$	x_4: $-\frac{16}{11}$
x_1	$\frac{36}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$
x_2	$\frac{40}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$
x_5	$\frac{75}{11}$	$8/11$	$6/11$
s	$-\frac{4}{11}$	$5/11 \ge 0$	$1/11 \ge 0$

$\Longrightarrow$ Primal unzulässig
$\Downarrow$
Knoten 1 kann eliminiert werden.

letzte Zeile kommt aus der 2. Zeile ($x_2 = \frac{40}{11} - \frac{5}{11} x_3 - \frac{1}{11} x_4$) eingesetzt in $x_2 - s = 4$

Einziger übrig gebliebener Knoten ist 2:

$$LP_2 = \max\{7x_1 + 2x_2 : Ax \le b \quad x_2 \le 3 \quad x \in \mathbb{R}^2_+\}$$

$$x_2 \le 3 \iff x_2 + s = 3$$

Lösung von LP_2 mit dualem Simplexverfahren und Startlösung $x^{(0)}$

		x_3	x_4
	$-\frac{332}{11}$	$-3/11$	$-16/11$
x_1	$\frac{36}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$
x_2	$\frac{40}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$
x_5	$15/11$	$8/11$	$6/11$
s →	$-\frac{7}{11}$	$\boxed{-5/11}$	$-\frac{1}{11}$

$$x_2 + s = 3$$

$$\iff \frac{40}{11} - \frac{5}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_3 = x_2$$

$$\iff s - \frac{5}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_4 + \frac{40}{11} = 3$$

Pivot Schritt

		s	x_4
	$-\frac{149}{5}$	$-7/5$	$3/5$
x_1	$\frac{17}{5}$	$-1/5$	$1/5$
x_2	3	1	0
x_5	$\frac{29}{5}$	$8/5$	$2/5$
x_3	$\frac{7}{5}$	$-\frac{11}{5}$	$\frac{1}{5}$

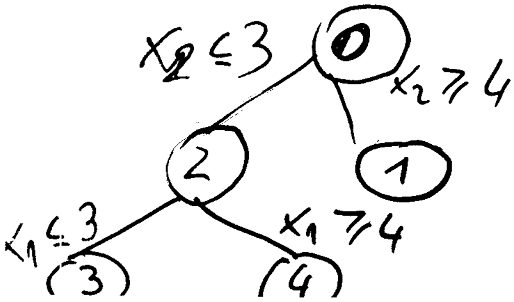
$$x^{(2)} = \left(\frac{17}{5}, 3, \frac{7}{5}, 0, \frac{29}{5}\right)$$

$$\mathrm{opt}(x^{(2)}) = 27$$

$$x_1^{(2)} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow N^{(2)} = \{1\}$$

Restriktionen

$$x_1 \le \left\lfloor \frac{17}{5} \right\rfloor = 3 \qquad x_1 \ge \left\lceil \frac{17}{5} \right\rceil = 4$$



$$x^{(3)} = (3, 3, 1, 2, 5) \quad z(x^{(3)}) = 27$$

$$\boxed{x^{(4)} = (4, 0, 8, 0, 0) \quad z(x^{(4)}) = 28}$$ OPTIMAL