Mathematik II M WM VT SS 2009
9. Übungsblatt

63. Bestimmen Sie *mittels der Variablentransformation* $u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ und $v = x/y$ den Flächeninhalt der Fläche, die im 1. Quadranten ($x > 0$, $y > 0$) von den Kurven $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$, $x = 9y$ und $x = 16y$ begrenzt wird.

64. Berechnen Sie das Volumen der Körper, die von den angegebenen Flächen begrenzt werden:
    (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{h}$, wobei $a, b, c, h > 0$.
    (b) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ und $z = e^{-(x^2+y^2)}$

65. Aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ wird das zylindrische Loch $x^2 + y^2 \leq 2ax$ ($a > 0$) ausgebohrt. Wie groß ist das Restvolumen?

66. Betrachten Sie den Körper, der entsteht, wenn die von den Kurven $f(x) = \sqrt{10x + 40}$, $g(x) = \sqrt{15x - 5}$ und der x- und y-Achse begrenzte Fläche um die x-Achse rotiert.
    (a) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers.
    (b) Bestimmen Sie die Oberfläche des Körpers.

67. Bestimmen Sie die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der Astroide

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

um die x-Achse erzeugt wird.

68. Aus der Kugel $\{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ wird ein kegelförmiges Loch

$$\{(x, y, z) \,|\, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$$

ausgebohrt. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse für diesen Körper unter der Annahme der konstanten Dichte ρ.

69. Berechnen Sie den Schwerpunkt des größeren der beiden Flächenstücke, die von $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$), der x-Achse und der Geraden $x = \frac{\pi}{4}$ begrenzt sind.

70. An eine Halbkreisfläche mit dem Radius a wird ein Rechteck mit Abmessungen $2a \times b$ angefügt; der Schwerpunkt der gesamten Fläche soll in den Kreismittelpunkt M fallen. Bestimmen Sie b in Abhängigkeit von a.

71. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines ebenen Objekts mit Berandung

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2$$

und konstanter Massendichte ρ bezüglich x- und y-Achse.
Hinweis: Polarkoordinaten.

72. Betrachtet wird der Körper, der entsteht, wenn die von der Geraden $x = 4\pi$, der Kurve $y = f(x)$ sowie der x- und y-Achse begrenzte Fläche um die y-Achse rotiert.
    (a) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers für $f(x) = 1 + \cos^2 x$ unter Verwendung der ersten Guldin'schen Regel.
    (b) Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationskörpers für $f(x) = 1 + \cosh x$ unter Verwendung der zweiten Guldin'schen Regel.