

Mathematik II M WM VT SS 2009

7. Übungsblatt

45. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 \end{pmatrix}$.

Für welche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist die Abbildung f lokal umkehrbar? (Hinweis: Satz über die Umkehrfunktion.)

46. In welchen Punkten (u, v) besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(u, v) = (u^2 - v^2, u^2 + uv)$$

eine lokale Umkehrfunktion?

47. Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{xy} + \sinh(x + y) - 1$. Existiert eine Funktion φ mit $f(x, \varphi(x)) = f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0)$? Falls ja, bestimmen Sie $\varphi'(0)$.

48. Begründen Sie warum sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 2\cos(xyz) - yz - 2x = 0 \\ f_2(x, y, z) &= (xyz)^2 + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(1, 0, 1)$ lokal nach y und z auflösen lässt und berechnen Sie für diese Auflösungen $y'(1)$, $z'(1)$, $y''(1)$ und $z''(1)$.

49. Bestimmen und klassifizieren Sie die singulären Kurvenpunkte der impliziten Funktion $x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0$ und bestimmen Sie sämtliche Extrema in x - und in y -Richtung. Stellen Sie jeweils fest, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

50. Eine Kurve sei implizit durch $x^3 + 3x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$ gegeben. Bestimmen Sie alle singulären Kurvenpunkte, klassifizieren Sie diese, und bestimmen Sie sämtliche lokale Extrema in y - und in x -Richtung. Stellen Sie jeweils fest, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

51. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden uneigentlichen Integrale und berechnen Sie ggf. deren Wert.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \cos x} & \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx & \quad \text{(c)} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}} \\ \text{(d)} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1 - x}} dx & \quad \text{(e)} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cot x dx \quad (\text{Achtung!}) \end{aligned}$$

52. Verwenden Sie das Integralkriterium, um zu entscheiden, ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind.

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \quad \text{(b)} \sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{n \log(n) \log(\log n)}$$

53. Konvergieren die folgenden uneigentlichen Integrale?

$$\text{(a)} \int_2^{\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2007} dx \quad \text{(b)} \int_1^{\infty} \frac{x + 1}{(x^{10} + 3x + 2007)^{1/3}} dx$$