Mathematik II M WM VT SS 2009

4. Übungsblatt

21. Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-3)((x-3)^2+y^2)}{x^2-6x+9+2xy-6y+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (3,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (3,0). \end{cases}$$

Ist f im Punkt $(3,0)$ stetig?

22. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

definiert. Stellen Sie fest, ob im Punkt $(0,0)$ die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx} existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.

23. Sei $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F(x,y,z) = ((a+1)x^2 + (b+2)xy + (c+3)xz + (d+4)yz + (e-10)y^2 + (f-11)z^2 + (g+2)xyz) \ln x \cos y \sin z$, wobei a, b, c, d, e, f, g die Ziffern Ihrer Matrikelnummer sind. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung ($\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$) sowie $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$.

24. $U:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei durch $U(x,y,z) = y \cos \frac{x}{z}$ mit $x = 4r^4 + 2s^3$; $y = 4r^2 - 2s^2$; $z = 2r - 3s^3$ gegeben. Bestimmen Sie $\frac{\partial U}{\partial r}$, $\frac{\partial U}{\partial s}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial r}$ über die Kettenregel für Funktionen in mehreren Veränderlichen und drücken Sie das Ergebnis in r und s aus.

25. Berechnen Sie die Punkte, in denen der Gradient von $f(x,y,z) = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}y^3 + z^2$ gleich $\left(1, -\frac{16}{9}, 1\right)$ ist.

26. Sei $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^3 z + \cos(yz^2) + x^2 + y^3 + z$.

    (a) Berechnen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $P = (0,-1,0)$ sowie die Richtungsableitung in diese Richtung.

    (b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene sowie den Normalvektor von $f(x,y,z) = 0$ im Punkt P.

27. Eine dünne Metallplatte wird erwärmt. Nach Festlegung eines Koordinatensystems kann die Temperaturverteilung für die Punkte (x,y) der Platte durch

$$f(x,y) = \frac{50\,xy}{x^2+y^2}$$

beschrieben werden. In welcher Richtung, ausgehend vom Punkt $(3,2)$, ist der stärkste Temperaturanstieg zu verzeichnen? Bestimmen Sie die Richtungsableitung in dieser Richtung. In welcher Richtung ändert sich die Temperatur zunächst nicht?

28. Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = x^2 + y^2$ im Punkt $(1,-1,2)$.

29. Schätzen Sie den Fehler bei der Berechnung von

$$f(x,y,z) = \frac{\sin x \exp y}{\sqrt{z^2+1}}$$

ab, wenn x, y und z mit den angegebenen Genauigkeiten gemessen wurden: $x = 0.1 \pm 0.001$, $y = 15 \pm 0.1$, $z = -3 \pm 0.01$.

30. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - 3x_2$ definiert.

a) Zeigen Sie: f ist total differenzierbar.

b) Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential von f .

c) Geben Sie die Taylorformel erster Ordnung für $x_1 = 4$ und $x_2 = 3$ an.

d) Berechnen Sie $f(5.12, 6.85)$ mit Hilfe der linearen Approximation durch das totale Differential und bestimmen Sie den daraus resultierenden Fehler im Vergleich zum exakten Funktionswert.

31. Sei $h(x_1, x_2) = g(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ mit $f_1(x_1, x_2) = x_1 \cos x_2$; $f_2(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2$ und $g(y_1, y_2) = (y_1 - y_2)^2$. Wie lautet das totale Differential dh? Verwenden Sie die Kettenregel!