Mathematik II M WM VT SS 2009
3. Übungsblatt

16. Betrachtet wird die durch
$$3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 10x_2 = -9$$
gegebene Ellipse. Gesucht ist die Länge der Halbachsen sowie der Mittelpunkt. Schreiben Sie dazu die Gleichung in Matrixschreibweise
$$x^tQx + b^tx = -9$$
mit $x = (x_1,\ x_2)^t$ und symmetrischer Matrix Q. Berechnen Sie eine orthogonale Matrix T, so dass $T^{-1}QT$ eine Diagonalmatrix ist. Substituieren Sie in der obigen Gleichung $x = T\bar{x}$. Was bedeutet das geometrisch?

17. Transformieren Sie folgende Quadrik des $\mathbb{R}^2$ auf ihre Normalform und finden Sie damit heraus um welche Quadrik es sich handelt. Geben Sie für die transformierte Quadrik die Koordinaten des Mittelpunktes (oder Scheitels, falls es sich um eine Parabel handelt) und die Richtungsvektoren der Hauptachsen an.
$$9x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 10x_1 + 180x_2 + 325 = 0$$

18. Durch die Gleichung
$$7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 36x_1 + 36x_2 = -159$$
wird ein Ellipsoid im $\mathbb{R}^3$ beschrieben.
    a) Schreiben Sie die Gleichung in Matrixschreibweise $x^tQx+b^tx = -159$ mit $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)^t$ und symmetrischer Matrix Q. Überzeugen Sie sich, dass $(2,\ 1,\ -2)^t$ und $(2,\ -2,\ 1)^t$ Eigenvektoren von Q sind. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T, sodass $T^{-1}QT$ eine Diagonalmatrix ist (Hinweis: Kreuzprodukt!). Geben Sie $T^{-1}QT$ an.
    b) Substituieren Sie $x = T\bar{x}$, und bringen Sie die Gleichung durch quadratische Ergänzung auf die Standardform. Wie groß sind die Halbachsen des Ellipsoids und wo liegt sein Zentrum bezüglich der ursprünglichen Koordinaten?

19. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit:
    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3-y}, & \text{falls } x^3 - y \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
    (c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2\sin(y)}{x-y} & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

20. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \frac{xy^2(x^2-y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4}.$$
Untersuchen Sie die Existenz von $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ und bestimmen Sie ggf. den Limes.