

Mathematik II M WM VT SS 2009

12. Übungsblatt

93. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung mittels eines integrierenden Faktors:

$$(x + 2y + 1) dx + x dy = 0.$$

Bestimmen Sie die spezielle Lösung, die $y(1) = 1$ erfüllt.

94. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = 3xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

95. Ist $y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$ überall in \mathbb{R} eindeutig lösbar?

96. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- (a) $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
- (b) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
- (c) $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

97. Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

- (a) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$
- (b) $y'' + 4y = \tan 2x$
- (c) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

98. Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$y'' - 2y' + y = 10e^x + 2 \sin x$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, die $y(0) = 3$ und $y'(0) = 5$ erfüllt.
- (c) Wie würde der Ansatz für eine partikuläre Lösung der obigen Gleichung mit dem Störglied $5x \sin 2x + x^2 e^x$ lauten? (Diese Lösung ist nicht zu berechnen!!)

99. Lösen Sie die lineare Differentialgleichung $y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{x^2} e^{3x}$.

100. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \text{ für } x \in [1, A)$$

mit Anfangsbedingungen $y'(1) = 1$ und $y(A) = b$ wobei $A > 1$ und $b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Für welche Werte von A ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar? Geben Sie für ein A , für das keine eindeutige Lösbarkeit vorliegt, je einen Wert von b an, für den das System keine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

101. Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - \frac{3}{2} xy'(x) + y(x) = x^3$$

- (a) zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung durch Reduktion der Ordnung. Nutzen sie, dass $y_1(x) = x^2$ die homogene Differentialgleichung löst.
- (b) Bestimmen Sie dann eine partikuläre Lösung und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.
- (c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(1) = \frac{17}{5}$ und $y'(1) = \frac{21}{5}$.

102. Lösen Sie die Differentialgleichung $x^3 y'' - x^2 y' - 3xy + 16 \ln x = 0$.