Mathematik II M WM VT SS 2009

11. Übungsblatt

84. Betrachten Sie die Einheitskugel

$$\vec{x}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \vartheta \le \pi\,.$$

   (a) Bestimmen Sie die Tangentialvektoren bzw. den Normalvektor an einem Punkt $\vec{x}(\varphi_0,\vartheta_0)$ der Kugel. Geben Sie die Tangentialvektoren und den Normalvektor am Punkt $(0,1,0)$ explizit an.

   (b) Bestimmen Sie die Länge der Breitenkreise $\vartheta = k$ für jede Konstante $k \in [0,\pi]$.

85. Sei $\mathcal{C}$ der Geradenabschnitt von $(0,0)$ nach $(2,3)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+4y^2}ds\,.$$

86. Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 im Kraftfeld $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy+xz^2+4x^2 \\ x^2+2z^2+y \\ 2yz+x^2z+1 \end{pmatrix}$ von $(0,0,0)$ nach $(1,2,1)$ entlang der Kurve $\gamma(t) = \left(t,2t,t^2\right)^T$ zu bewegen.

87. Sei $\mathcal{C}_1$ das in der oberen Halbebene zwischen $(-1,1)$ und $(1,1)$ gelegene Bogenstück des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ und Mittelpunkt $(0,0)$. Berechnen Sie Masse und Schwerpunkt des Bogenstücks wenn es mit Masse der Dichte $\rho(x,y) = y$ belegt wird.

88. Berechnen Sie $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v)$ für das Vektorfeld $v = \left(x^2y,-2zx,2yz\right)^T$.

89. Gegeben ist das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz+ax^2 \\ xz-a^2z \\ xy-4y-az^2 \end{pmatrix}, \ (a \in \mathbb{R} \text{ ist eine Konstante})\,.$$

   Bestimmen Sie

   (a) die Rotation $\operatorname{rot}(v)$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld wirbelfrei?

   (b) die Divergenz $\operatorname{div}(v)$ und alle Quellen und Senken in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

90. Berechnen Sie unter Angabe aller Zwischenschritte

$$\operatorname{div}(f\operatorname{grad} g) - \operatorname{div}(g\operatorname{grad} f)$$

   für $f(x,y,z) = x^2-4xz+y^2$ und $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

91. Gegeben seien die Punkte $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (1,0)$ und $O = (0,0)$ sowie die geradlinigen Wege von P_1 nach O und von P_1 nach O über P_2.

   (a) Berechnen Sie für die Kraftfelder $\vec{F}(x,y) = (x+y,-x)^T$ und $\vec{G}(x,y) = (y,x)^T$ welche Arbeit erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 auf diesen Wegen von P_1 nach O zu bewegen. Welches der Felder ist ein Gradientenfeld?

   (b) Geben Sie für das Gradientenfeld die potenzielle Energie an.

92. Prüfen Sie, ob die Differentialgleichungen

(a) $(y - x^3) + (y^3 + x)y' = 0$,

(b) $\cos x \cos y - (\sin x \sin y + y^2)y' = 0$

exakt sind, und lösen Sie sie gegebenenfalls.