

Mathematik II M WM VT SS 2009

10. Übungsblatt

73. Betrachten Sie die Kurve \mathcal{C} in der xy -Ebene, die durch $x = t^2$ und $y = t - \frac{t^3}{3}$ gegeben ist und berechnen Sie die Länge des geschlossenen Teils von \mathcal{C} .
74. Berechnen Sie die Bogenlänge der hyperbolischen Spirale $r\varphi = 1$ von $\varphi_1 = \frac{3}{4}$ bis $\varphi_2 = \frac{4}{3}$.
75. Betrachtet wird die Raumkurve $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$w(t) = \begin{pmatrix} 1 + t - \frac{1}{3}t^3 \\ t^2 \\ t + \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Bogenlänge L von w .

76. Man ermittle die Bogenlänge der Schnittkurve der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ und des elliptischen Zylinders $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b^2 \leq a^2)$.
77. Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Krümmungskreises der Kardioide $r = 1 - \cos \varphi$ im Punkt $(-2, 0)$.
78. An welcher Stelle hat die Kurve $y = \ln x$ die größte Krümmung? Berechnen Sie zu diesem Punkt der Kurve den Mittelpunkt des Krümmungskreises und seinen Radius.
79. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = 2 \cdot \cosh \frac{x}{2}$ für x von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 2$. Wie lauten die Gleichungen der Tangente und der Normale in $x = 2$?
80. Führen Sie für die durch $\vec{x}(t) = (\sinh 2t, 2t, \cosh 2t)^T$ gegebene Kurve die Bogenlänge s als neuen Parameter ein, wobei dem Punkt $P_0(0, 0, 1)$ die Bogenlänge $s = 0$ entsprechen soll.
81. Gegeben ist die Raumkurve $\vec{x}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)^T$. Gesucht sind:
- die Krümmung κ ,
 - die Torsion τ ,
 - das begleitende Dreibein in $t = 1$,
 - die Gleichung von Schmiege-, Normal- und Streckeebene in $t = 1$.

82. Gegeben ist die Raumkurve $\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \arctan s \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(s^2 + 1) \\ s - \arctan s \end{pmatrix}$. Man überprüfe, dass s die Bogenlänge ist.

Gesucht sind:

- Begleitendes Dreibein
 - Krümmung κ , Torsion τ .
83. Gegeben sei das Drehparaboloid $z(x, y) = x^2 + y^2$. Durch $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto z(2, t)$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto z(2t, t), t \geq 0$, sind zwei Raumkurven gegeben. Berechnen Sie die Länge jenes Stückes der durch die Funktion g gegebenen Kurve, das sich vom Koordinatenursprung bis zum Schnittpunkt der zwei gegebenen Raumkurven erstreckt.