Mathematik II M WM VT SS 2009
10. Übungsblatt

73. Betrachten Sie die Kurve $\mathcal{C}$ in der xy-Ebene, die durch $x = t^2$ und $y = t - \frac{t^3}{3}$ gegeben ist und berechnen Sie die Länge des geschlossenen Teils von $\mathcal{C}$.

74. Berechnen Sie die Bogenlänge der hyperbolischen Spirale $r\varphi = 1$ von $\varphi_1 = \frac{3}{4}$ bis $\varphi_2 = \frac{4}{3}$.

75. Betrachtet wird die Raumkurve $w : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit
$$w(t) = \begin{pmatrix} 1 + t - \frac{1}{3}t^3 \\ t^2 \\ t + \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Bogenlänge L von w.

76. Man ermittle die Bogenlänge der Schnittkurve der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ und des elliptischen Zylinders $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b^2 \leq a^2)$.

77. Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Krümmungskreises der Kardioide $r = 1 - \cos\varphi$ im Punkt $(-2, 0)$.

78. An welcher Stelle hat die Kurve $y = \ln x$ die größte Krümmung? Berechnen Sie zu diesem Punkt der Kurve den Mittelpunkt des Krümmungskreises und seinen Radius.

79. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = 2 \cdot \cosh \frac{x}{2}$ für x von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 2$. Wie lauten die Gleichungen der Tangente und der Normale in $x = 2$?

80. Führen Sie für die durch $\vec{x}(t) = \big(\sinh 2t, 2t, \cosh 2t\big)^T$ gegebene Kurve die Bogenlänge s als neuen Parameter ein, wobei dem Punkt $P_0(0, 0, 1)$ die Bogenlänge $s = 0$ entsprechen soll.

81. Gegeben ist die Raumkurve $\vec{x}(t) = \big(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\big)^T$. Gesucht sind:
    a) die Krümmung κ,
    b) die Torsion τ,
    c) das begleitende Dreibein in $t = 1$,
    d) die Gleichung von Schmieg-, Normal- und Streckebene in $t = 1$.

82. Gegeben ist die Raumkurve $\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \arctan s \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(s^2 + 1) \\ s - \arctan s \end{pmatrix}$. Man überprüfe, dass s die Bogenlänge ist.
Gesucht sind:
    a) Begleitendes Dreibein
    b) Krümmung κ, Torsion τ.

83. Gegeben sei das Drehparaboloid $z(x, y) = x^2 + y^2$. Durch $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto z(2, t)$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto z(2t, t)$, $t \geq 0$, sind zwei Raumkurven gegeben. Berechnen Sie die Länge jenes Stückes der durch die Funktion g gegebenen Kurve, das sich vom Koordinatenursprung bis zum Schnittpunkt der zwei gegebenen Raumkurven erstreckt.