Mathematik II M WM VT SS 2009
1. Übungsblatt

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

   (a)
   $$\phi_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi_1((v_1, v_2, v_3)^T) = (v_2 + 3, v_1 + v_2, v_3/2)^T$$

   (b)
   $$\phi_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad \phi_2((v_1, v_2, v_3)^T) = (v_1 + v_2 + v_3, v_3 - v_2)^T$$

2. Wir betrachten die Basis $\{(1,0,0)^T, (1,1,0)^T, (1,1,1)^T\}$ von $\mathbb{R}^3$ und eine lineare Abbildung ϕ für die folgende Gleichungen gelten:

   $$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Sei $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Geben Sie $\phi(v)$ explizit an. Ist ϕ injektiv?

3. Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild der linearen Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(v_1, v_2, v_3)^T) \mapsto (v_1 + v_2 + v_3, v_2 + tv_3, v_2 + v_3)^T$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von t ist ϕ injektiv, surjektiv, bijektiv?

4. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem. Sei ϕ jene Abbildung in $\mathbb{R}^3$, die jeden Punkt $v \in \mathbb{R}^3$ an der Ebene $x + y + z = 1$ spiegelt.

   (a) Sei $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Geben Sie $\phi(v)$ explizit an. Ist ϕ eine lineare Abbildung?

   (b) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild der Abbildung ϕ. Ist ϕ bijektiv?

5. (a) Welche geometrische Bedeutung hat die lineare Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Av$ mit

   $$(i)\, A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad (ii)\, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   (b) Stellen Sie eine Drehung um 75° (gegen den Uhrzeigersinn) um den Koordinatenursprung in $\mathbb{R}^2$ als lineare Abbildung der Form $\phi(v) = Av$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$, mit einer konkreten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dar.

6. Stellen Sie eine Drehung um den Winkel α und Drehachse $e_1 = (1,0,0)^T$ bzw. $e_2 = (0,1,0)^T$ in $\mathbb{R}^3$ als lineare Abbildung der Form $\phi(v) = Av$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$, dar. Wie lässt sich die Durchführung der zwei oben genannten Drehungen hintereinander als lineare Abbildung der Form $\phi(v) = Av$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$, darstellen?

7. Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $v \mapsto Av$ mit der Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Gegeben sind weiter die Vektoren:

   $$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\varphi(a)$ und begründen Sie, dass $\varphi(b)$ im Kern von φ liegt. Ist φ injektiv?

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild der linearen Abbildung φ.

(c) Bestimmen Sie Basen des Kerns und des Bildes von φ.

(d) Bestimmen Sie die Menge L aller $v \in \mathbb{R}^4$ mit $\varphi(v) = c$.

8. Betrachten Sie den Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten und Grad kleiner oder gleich drei. Wir bezeichnen diesen Raum mit $\mathcal{P}[\mathbb{R}]_3$. Weiters sei $\phi\colon \mathcal{P}[\mathbb{R}]_3 \to \mathcal{P}[\mathbb{R}]_3$, $\phi(p(x)) = p'(x)$ eine Abbildung, die jedem Polynom $p(x) \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]_3$ seine Ableitung $p'(x)$ zuordnet.

   (a) Zeigen Sie, dass $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ mit $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ und $p_4(x) = x^3$ eine Basis von $\mathcal{P}[\mathbb{R}]_3$ darstellt. Diese Basis heißt *Standardbasis* von $\mathcal{P}[\mathbb{R}]_3$. Welche Dimension hat $\mathcal{P}[\mathbb{R}]_3$?

   (b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung ϕ und deren Dimensionen.

   (c) Geben Sie die Standardbasen des Kernes und des Bildes von ϕ an.

   (d) Die Abbildung ϕ lässt sich mit Hilfe einer Dartstellungsmatrix A bzgl. der Standardbasis so darstellen, dass $\forall p(x) \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]_3$, die Gleichung $p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ die Gleichung $q(x) = \phi(p(x)) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ mit

   $$(b_0, b_1, b_2, b_3)^T = A(a_0, a_1, a_2, a_3)^T$$

   impliziert. Bestimmen Sie die Matrix A.

   (e) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung ϕ bzgl. der (geordneten) Basis $\{q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)\}$, mit $q_1(x) = x^3$, $q_2(x) = 2x^2$, $q_3(x) = 4x$, $q_4(x) = 2$.