Nachklausur zur 1. Übungsklausur am 2.7.09

Bsp. 1
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)(1-\lambda)+4+4+4(2+\lambda)-(1-\lambda)+4(2+\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27 = -\lambda(\lambda^2-9) - 3(\lambda^2-9) =$$
$$= -(\lambda^2-9)(\lambda+3) = -(\lambda+3)^2(\lambda-3) = 0$$

$$\Downarrow$$

$\lambda = -3$ 2-fach
$\lambda = 3$ 1-fach } ~~algebr. Vielfachheiten~~ war nicht gefragt

${}_2\lambda_1 = -3$ $\lambda_3 = 3$

Eigenvektore/-raum zu ${}_2\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 1+3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$4x + 2y + 2z = 0$$
$$2x + y + z = 0$$
$$2x + y + z = 0$$

Zeilennormalform

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Z-3.Z} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.Z-\frac{1}{2}\cdot 1.Z} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y + 2z = 0$$

2 freie Variablen

$$4x = -2y - 2z$$
$$\cancel{x = -\frac{y}{2} - \frac{z}{2}}$$

$y = s$ $z = t$

$$x = \frac{-2s - 2t}{4}$$
$$x = -\frac{s}{2} - \frac{t}{2}$$

Eigenraum
$$ER_{{}_2\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s}{2} - \frac{t}{2} \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim ER_{{}_1\lambda_2} = 2$ ~~Geom. Vielfachheit = 2~~ war nicht gefragt.

Eigenvektoren / -raum zu $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 & 2 \\ 2 & -2-3 & 1 \\ 2 & 1 & -2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3Z-2Z} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot Z + 1\cdot Z} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$3Z \cdot 12 + 2Z$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow -2x = -4y$

$-3y + 3z = 0 \Rightarrow \boxed{y = z}$, $\boxed{x = +2y}$

Eigenraum zu $\lambda_3 = 3$: $\left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim(\text{Eigenraum zu } \lambda_3 = 3) = 1$ geom. Vielfachheit.

(b) Gesucht:

Orthogonale Matrix T, sodass

$T^{-1} A T$ eine Diagonalmatrix ist.

Eigenvekt. zu $\lambda = -3$: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder besser $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eigenvekt zu $\lambda = 3$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ orthogonal $\quad \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

Suche $\vec{v}_3{}'$ orthogonal zu $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$.

$$\vec{v}_3{}' = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +5 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{v}_2{}', \vec{v}_3{}' \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +5 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\langle \vec{v}_1{}', \vec{v}_3{}' \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +5 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ & & -1 \\ 1 & 0 & +5 \end{pmatrix}$$

Aus der Theorie nun bekannt das

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} +3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Nachklausur zur 1. Übungsklausur am 2.7.

Bsp. 2

a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

Taylor um $(2.5, 1.5)$

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \qquad f_y = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

$$f_{xx} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}{2(x+y)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+y)^{3/2}}$$

$$f_{yy} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+y)^{3/2}} \quad \text{(analog)}$$

$$f_{xy} = -\frac{1}{4(x+y)^{3/2}}$$

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(2.5, 1.5)}_{=2} + \underbrace{f_x^{(2.5,1.5)}}_{\frac{1}{4}}(x-2.5) + \underbrace{f_y(2.5;1.5)}_{\frac{1}{4}}(y-1.5)$$

$$+\frac{1}{2}\Big(f_{xx}(x-2.5)^2 + 2f_{xy}(2.5, 1.5)(x-2.5)(y-1.5)$$

$$+ f_{yy}(2.5, 1.5)(y-1.5)^2\Big) =: T(x,y)$$

$$f(x,y) \approx 2 + \frac{1}{4}(x+y-4) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\cdot 4\cdot 2}\right)\left((x-2.5)^2 + 2(x-2.5)(y-1.5) + (y-1.5)^2\right)$$

$$= \underbrace{2 + \frac{1}{4}(x+y-4) - \frac{1}{4^3}\left[(x-2.5)^2 + 2(x-2.5)(y-1.5) + (y-1.5)^2\right]}_{=:T_2(x,y)}$$

$T_2(2,1) = 1.7321$

b) $f(2,1) \approx T_2(x,y)$ $\qquad f(2,1) = 1.7344$

$$\left|\frac{f(2,1) - T_2(2,1)}{f(2,1)}\right| = \frac{|1.7344 - 1.7321|}{1.7344} = \frac{|0.0023|}{1.7344}$$

$= 0.0001729$

$= 0.017\,\%$ ✓

Nachklausur zur 1. Übungsklausur, 2.7.09

Bsp. 3

$$f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x y z) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$$

NB: $x+y+z=12$

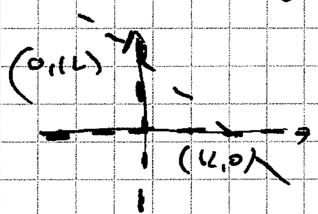
Minima oder Maxima!

Auflösung der NB $\Rightarrow$ $z = 12 - x - y$

Einsetzen in der zu untersuchenden Fkt:

$$F(x y) = f(x, y, 12-x-y) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{12-x-y}$$

definiert für
$x \neq 0$
$y \neq 0$
$12-x-y \neq 0$



lokale Extrema von f mit NB $\iff$ lokale Extrema von F

kritische Punkte von F

$$F_x = -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(12-x-y)^2} = 0$$

$$F_y = -\frac{4}{y^2} + \frac{9}{(12-x-y)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{x^2} = \frac{4}{y^2} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{4}$

$$x = \pm \frac{y}{2}$$

Fall I $x = \frac{y}{2}$ ~~$F_x = -\frac{4}{y^2} + 9$~~

Setze in $9x^2 = (12-x-y)^2$ ein: $9 \cdot \frac{y^2}{4} = \left(12 - \frac{y}{2} - y\right)^2$

$$9 \frac{y^2}{4} = \left(12 - \frac{3}{2} y\right)^2 \Rightarrow \frac{3y}{2} = \pm\left(12 - \frac{3}{2} y\right)$$

a) $\frac{3y}{2} = 12 - \frac{3}{2}y \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$

b) $\frac{3y}{2} = -12 + \frac{3y}{2} \Rightarrow$ keine Lösung.

Also $y = 4$ $\quad x = \frac{y}{2} = 2$

$\boxed{P_1 = (2,4)}$ $\quad 2+4 \neq 12$ d.h. P_1 im DB von F

Fall II $\quad x = -\frac{y}{2}$

Setze in $9x^2 = (12-x-y)^2$ ein:

$$9\frac{y^2}{4} = \left(12 + \frac{y}{2} - y\right)^2 = \left(12 - \frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3y}{2} = \pm\left(12 - \frac{y}{2}\right)$$

a) $\frac{3y}{2} = 12 - \frac{y}{2} \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$

$x = -\frac{y}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

$P_2 = (-3, 6)$ $\quad -3+6 = 3 \neq 12$ also im DB von F

b) $\frac{3y}{2} = -12 + \frac{y}{2} \Rightarrow y = -12$

$x = -\frac{y}{2} = \frac{12}{2} = 6$ $\quad x+y = 6-12 = -6 \neq 12$
also P_3 im DB von F

$P_3 = (6, -12)$

kritische Punkte $\underline{P_1 = (2,4),\ P_2 = (-3,6),\ P_3 = (6,-12)}$

$$F_{xx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(12-x-y)^2}\right)'_x = \frac{2}{x^3} - 9\frac{2(12-x-y)(-1)}{(12-x-y)^4} =$$

$$= \frac{2}{x^3} + \frac{18}{(12-x-y)^3}$$

$$F_{yy} = \left(-\frac{4}{y^2} + \frac{9}{(12-x-y)^2}\right)'_y = \frac{8}{y^3} - 9\frac{2(12-x-y)(-1)}{(12-x-y)^4} =$$

$$= \frac{8}{y^3} + \frac{18}{(12-x-y)^3}$$

$$F_{xy} = F_{yx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(12-x-y)^2}\right)' = -9\,\frac{2(12-x-y)(-1)}{(12-x-y)^4}$$

$$= \frac{18}{(12-x-y)^3}$$

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} + \frac{18}{(12-x-y)^3} & \frac{18}{(12-x-y)^3} \\ \frac{18}{(12-x-y)^3} & \frac{8}{y^3} + \frac{18}{(12-x-y)^3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{(2,4)}{H_f(P_1)} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/12 \\ 1/12 & \frac{5}{24} \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \det H_f(P_1) = \frac{5}{72} - \frac{1}{144} > 0 \\ \frac{1}{3} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H_f(P_1)$ pos. def

<u>lok. Minim</u>

$$f(P_1) = f(2,4) = 3$$

$$\underset{-3,6}{H_f(P_2)} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{81} & \frac{2}{81} \\ \frac{2}{81} & \frac{5}{81} \end{pmatrix}$$

$\det H_f(P_2) < 0$

$H_f(P_2)$ indefinit

P_2 ist ein <u>Sattelpunkt</u>

$$\underset{6,-12}{H_f(P_3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{81} & \frac{1}{324} \\ \frac{1}{324} & -\frac{1}{648} \end{pmatrix}$$

$\det H_f(P_3) < 0 \Rightarrow H_f(P_3)$ indefinit

P_3 <u>Sattelpunkt</u>

<u>Einziges lokales Extremum ist $P_1 = (2,4)$</u>

<u>mit $f(P_1) = f(2,4,6) = 3$</u>

und P_1 ist ein <u>lokales Minimum.</u>