Kombinatorische Optimierung 2 SS 2015

6. Übungsblatt

43. Man betrachte den folgenden Greedy-Algorithmus für das Knapsack-Problem: Man sortiere die Indizes, so dass $\frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{w_n}$ und setze $S := \emptyset$. `For` $i = 1$ `to` n `do: If` $\sum_{j \in S \cup \{i\}} w_j \leq W$ `then` $S := S \cup \{i\}$. Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus für kein k einen k-Approximationsalgorithmus ergibt.

44. Geben Sie einen exakten Algorithmus für das Knapsack Problem mit Laufzeit $O(nW)$.

45. Betrachten Sie das folgende Standortproblem. Gegeben sei eine Menge von n Kunden, jeweils mit der Nachfrage d_j, $1 \leq j \leq n$, und m mögliche Standorte von denen jeder einzeln bereitgestellt werden kann. Für jeden Standort $i = 1, 2, \ldots, m$ seien f_i die Bereitsstellungskosten, u_i die Kapazität und c_{ij} die Entfernung zu jedem der Kunden $j = 1, 2, \ldots, n$. Es soll entschieden werden, welche Standorte bereitgestellt werden, und welcher Standarort welchen Kunden bedient, sodass jeder Kunde einem Standort zugeordnet wird und die Gesamtnachfrage aller einem Standort zugeordneten Kunden die Kapazität des Standortes nicht überschreitet. Das Ziel ist es, die Summe aller Bereitsstellungskosten und der Entfernungen aller Kunden zu ihren Standorten zu minimieren.

    Dieses Problem lässt als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem formulieren:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{j=1}^n d_j x_{ij} \leq u_i y_i \,, \forall i = 1, 2, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \,, \forall j = 1, 2, \ldots, n \\ & x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \,, \forall i = 1, 2, \ldots, m \,, j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

    Wenden Sie Lagrange-Relaxation auf zwei verschiedenen Weisen an: Relaxieren Sie $\sum_{j=1}^n d_j x_{ij} \leq u_i y_i$ für alle i, oder $\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1$ für alle j. Zeigen Sie, dass eine der zwei linearen Relaxationen in linearer Zeit gelöst werden kann, während die andere auf m Instanzen des Rucksack-Problems zurückgeführt werden kann.

    Welches Lagrange-Duale-Problem liefert eine schärfere Schranke?