Kombinatorische Optimierung 2 SS 2015

5. Übungsblatt

35. Die Heuristik "nearest neighbor" (NN) für das TSP (in einem vollständigen Graphen) funktioniert folgendermaßen. NN konstruiert eine Tour, in dem sie mit einem Pfad P_0 bestehend aus einem beliebigen Anfangsknoten v_0 startet. Der Pfad wird iterativ um neue im Pfad noch nicht vorkommende Knoten erweitert. In der k-ten Iteration wird dem Pfad P_{k-1} ein neuer Knoten v_k angehängt, nämlich ein Nachbar vom letzten Knoten v_{k-1} von P_{k-1}, der einen minimalen Abstand von v_{k-1} aufweist. Der so entstandener Pfad ist um eine Kante länger und wird mit P_k bezeichnet. Nach $n-1$ Iterationen hat der Pfad $P_{n-1} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ bereits n Knoten und kann nicht mehr verlängert werden. Dann wird der Pfad mit Hilfe der Kante (v_{n-1}, v_0) zu eine Tour abgeschlossen.

    Zeigen Sie, dass die "nearest neighbor" Heuristik eine beliebig schlechte Tour liefern kann, wenn die Kantengewichte die Dreiecksungleichung nicht erfüllen. Beliebig schlecht heißt in diesem Fall, dass $c(T_{\text{NN}})/c(T_*)$ beliebig groß wird, wobei $c(T_{\text{NN}})$ die Länge der von der NN-Heuristik bestimmten Tour und $c(T_*)$ die Länge der optimalen Tour ist

36. Sei T_* eine optimale Tour einer Instanz des Euklidischen TSP (vgl. Vorlesung). Zeigen Sie, dass T_* sich nicht überkreuzt, d.h. es gibt keine Kanten in T_*, die sich überkreuzen.

37. Zeigen Sie anhand des unstehenden Beispiels, dass die Approximationsgüte der Christofides Heuristik ($\frac{3}{2}$, vgl. Vorlesung) scharf ist.

    Betrachten wir eine Instanz des Euklidischen TSP mit einer ungeraden Anzahl von Knoten n und Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, sodass die Knoten $v_1, v_3, \ldots, v_n$ auf einer Geraden d_1 und die Knoten $v_2, v_4, \ldots, v_{n-1}$ auf einer anderen Geraden d_2 parallel zu d_1 liegen. Weiters sei der Abstand zwischen je zwei aufeinander folgenden Knoten in d_1 (d_2) gleich $1+\epsilon$, für ein $\epsilon \in (0, 1/2)$. Letzlich seien der Abstand zwischen den Geraden d_1 und d_2 und die Lage der Knoten in den beiden Geraden so gewählt, dass der Abstand zwischen den Knoten v_{2k-1} und v_{2k} gleich $1-\epsilon$ und der Abstand zwischen den Knoten v_{2k} und v_{2k+1} gleich 1 ist, für $k = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$.

38. Zeigen Sie: Wenn die 2-Matching-Ungleichungen für alle Mengen $X \subseteq V(K_n)$ und alle Matchings $F \subseteq \delta(X)$ mit $|F|$ ungerade erfüllt sind, so sind sie auch $\forall X \subseteq V(K_n)$ unf $\forall F \subseteq \delta(X)$ mit $|F|$ ungerade erfüllt.

39. Sei G ein vollständiger bipartiter Graph mit Bipartition $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, wobei $|A| = |B|$. Sei $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ eine Kostenfunktion mit $c((a,b)) + c((b,a')) + c((a',b')) \geq c((a,b'))$ für alle $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$. Gesucht wird ein Hamiltonscher Kreis mit minimalen Gesamtkosten in G. Dieses Problem heißt *das metrische bipartite TPS*.

    (a) Beweisen Sie für jedes k: Gibt es einen k-Approximationsalgorithmus für das metrische bipartite TSP, so gibt es auch einen k-Approximationsalgorithmus für das metrische TSP.

    (b) Geben Sie einen 2-Approximationsalgorithmus für das metrische bipartite TSP an. Verwenden Sie den gleichen Ansatz wie beim Doppelbaumalgorithmus, jedoch für einen speziell-strukturierten minimalen Spannbaum des bipartiten Graphen.

40. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichten c_e, $\forall e \in E$. Sei T ein minimaler Spannbaum in G und v ein Blatt in T. Zeigen Sie, dass die Erweiterung von T um eine Kante (v, u) mit dem zweitkleinsten Gewicht in $\{c_e : e \in \delta(v)\}$ einen optimalen 1-Baum mit v als Knoten v_1 darstellt.

    Geben Sie das Beispiel eines gewichteten Graphen (G, c) an, in dem der optimale Knoten v_1, d.h. jener Knoten der die größte 1-Baum Schranke liefert, kein Blatt in einem minimalen Spannbaum T in (G, c) ist.

41. Geben Sie eine Instanz der TSP an, für die die untere Schranke von Held und Karp nicht mit der Länge der optimalen Tour übereinstimmt.

42. Beweisen Sie, dass es Instanzen (K_n, c) des metrischen TSP mit $c\colon E(K_n) \to \mathbb{R}_+$ gibt, für die die Held und Karp untere Schranke $\mathrm{HK}(K_n, c)$ beliebig nahe bei $\frac{3}{4}\mathrm{OPT}(K_n, c)$ liegt, wobei $\mathrm{OPT}(K_n, c)$ die Länge der optimalen Tour ist.