Kombinatorische Optimierung 2 SS 2015

4. Übungsblatt

29. (a) Eine *topologische Sortierung* eines Digraphen G ist eine bijektive Abbildung $f\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$, für die $f(v) \leq f(w)$ gilt, fälls $\{v, w\} \in E(G)$. Ein Digraph G heißt *azyklisch*, wenn er keine gerichteten Kreise besitzt. Zeigen Sie, dass ein Digraph G dann und nur dann azyklisch ist, wenn er eine topologische Sortiertung besitzt.

    (b) Das *Mimimum-Feedback-Arc-Set-Problem (MFASP)* lautet: Bestimmen Sie einen azyklischen Teilgraphen mit maximaler Gesamtsumme der Kantengewichte in einem gegebenen kantengewichteten Digraphen. Formulieren Sie einen 2-Approximationsalgorithmus für MFASP in dem Sie die Knoten von $V(G)$ durchnummerieren und dann einen passenden Teilgraphen wählen, für den diese Durchnummerierung eine topologosche Sortierung darstellt.

30. Das *k-Center-Problem* wird wie folgt definiert: Für einen gegebenen ungerichteten Graphen G mit Gewichten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$, und einer Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |V(G)|$, soll eine Menge $X \subseteq V(G)$ mit $|X| = k$ bestimmt werden, die $dist(X) := \max_{v \in V(G)} \min_{x \in X} dist(v, x)$ minimiert. Für alle $x, y \in V(G)$ bezeichnet $dist(x, y)$ die Länge eines kürzesten x-y-Weges bezüglich der Gewichte c in G.

    Bezeichne $OPT(G, c, k)$ den optimalen Zielfunktionswert des durch den Graphen G, die Gewichte c und den Parameter k definierten Instanz des Problems.

    (a) Sei $R \in \mathbb{R}$ eine Konstante und S eine stabile Menge mit maximaler Kardinalität im Graphen $H(R) := \Big(V(G), \big\{\{v, w\}\colon dist(v, w) \leq 2R\big\}\Big)$. Zeigen Sie, dass $OPT(G, c, |S| - 1) > R$ gilt.

    (b) Verwenden Sie (a) um einen 2-Approximationsalgorithmus für das k-Center-Problem zu beschreiben.

31. Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung beschriebener Greedy-Algorithmus für das *Max-Weight-Cut-Problem* ein 2-Approximationsalgorithmus ist. Zur Erinnerung: Beim *Max-Weight-Cut-Problem* besteht der Input aus einem ungerichteten Graphen G mit nicht-negativen Kantengewichten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$. Gesucht wird eine Teilmenge S der Knotenmenge $V(G)$, die $c(\delta(S)) := \sum_{v \in S, w \notin S} c(\{v, w\})$ minimiert.

32. Betrachten Sie den folgenden lokalen Suchalgorithmus für das *Max-Cut-Problem*. Man beginnt mit einer nicht-leeren, echten Teilmenge S von $V(G)$ und prüft iterativ, ob irgendein Knoten aus S entfernt oder in S hinzugefügt werden kann, so dass $|\delta(S)|$ wächst. Der Algorithmus terminiert wenn eine solche Verbesserung nicht möglich ist.

    (a) Zeigen Sie, dass jeder ungerichteter Graph einen Schnitt besitzt, der mindestens die Hälfte aller Kanten enthält.

    (b) Beweisen Sie, dass das obige Verfahren ein 2-Approximationsalgorithmus ist.

    (c) Kann der Algorithmus auf das *Max-Weight-Cut-Problem* mit nicht-negativen Kantengewichten erweitert werden?

    (d) Findet der Algorithmus immer eine optimale Lösung für bipartite Graphen?

33. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen bipartiten Graphen mit $2n$ Knoten gibt, für den der Greedy-Algorithmus (Knotenfärbung), n Farben benötigt. Somit kann dieser Algorithmus beliebig schlechte Ergebnisse liefern. Zeigen Sie jedoch, dass es in jedem (bipartiten) Graphen eine Reihenfolge der Knoten gibt, für die der Algorithmus eine optimale Färbung findet.

34. Zeigen Sie, dass die folgenden Graphen perfekt sind:

    (a) bipartite Graphen

(b) *Intervallgraphen*, d.h. Graphen der Form $(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{\{v_i, v_j\} \colon i \neq j, [a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset\})$, wobei $[a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$, abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.

(c) *Chordale Graphen*. Ein Graph G heißt *chordal*, falls er keinen Kreis mindestens der Länge 4 als induzierten Teilgraphen enthält.