Kombinatorische Optimierung 2 SS 2015

3. Übungsblatt

19. Beschreiben Sie einen polynomiellen Algorithmus zur Bestimmung eines b-Matchings mit maximalem Gewicht in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit unendlichen Kantenkapazitäten (d.h. $u(e) = \infty, \forall e \in E$) und mit $\sum_{v \in V} b(v) = O(n)$, wobei $n = |V(G)|$).

    Hinweis: Verwendeten Sie das gewichtete Matching-Algorithmus.

20. Zeigen Sie, dass das maximal gewichtete b-Matching Problem für den Fall, dass $b(v)$ für alle $v \in V(G)$ gerade ist, in streng polynomialer Zeit gelöst werden kann.

    Hinweis: Führen Sie das Problem auf ein minimales Kostenflussproblem zurück.

21. Betrachten Sie den Graphen G aus Abbildung 1. Bestimmen Sie unter Verwendung des in der Vorlesung besprochenen Algorithmus ein minimal gewichtetea T-Join für $T = \{1, 2, 5, 7\}$ in G. Die Zahlen neben den Kanten sind die Kantengewichte.

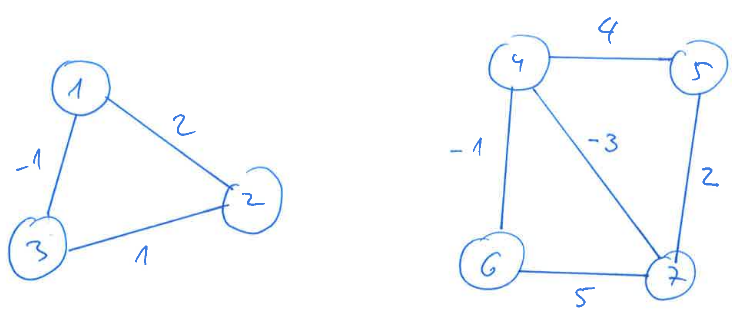

Abbildung 1: Inputgraph für Aufgabe 21

22. Betrachten Sie den Graphen G aus Abbildung 2. Bestimmen Sie unter Verwendung des in der Vorlesung besprochenen Algorithmus ein Kreis mit minimaler Länge in G. Die Zahlen neben den Kanten sind die Kantengewichte.

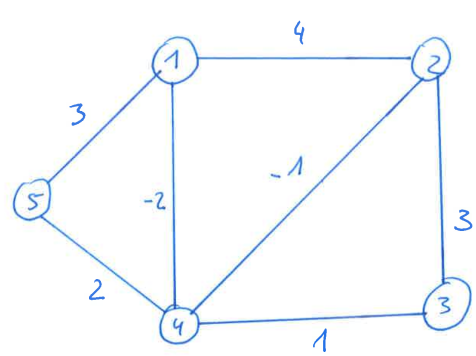

Abbildung 2: Inputgraph für Aufgabe 22 und 23

23. Betrachten Sie den Graphen G aus Abbildung 2. Bestimmen Sie unter Verwendung des in der Vorlesung besprochenen Algorithmus alle kürzesten Wege in G. Die Zahlen neben den Kanten sind die Kantengewichte.

24. Geben Sie einen $O(|E(G)||V(G)|^3)$ Algorithmus zur Bestimmung eines Kreises mit minimalem Gewicht in einem ungerichteten, gewichteten Graphen G mit konservativen Gewichten. Somit lässt es in einem solchen Graphen auch *die Taille* des Graphen in polynomieller Zeit bestimmen. (Die *Taille*, in Englisch „girth", eines ungerichteten Graphen G wird als die kleinstmögliche Anzahl von Kanten eines Kreises in G definiert.).

25. Gegeben sei ein ungerichteter Graph G und eine Menge $T \subseteq V(G)$ mit $|T|$ gerade. Beschreiben Sie einen polynomiellen Algorithmus der einen T-Join in G findet, oder entscheidet, dass es keinen solchen gibt.

26. Sei G ein ungerichteter Graph, $T \subseteq V(G)$ mit $|T|$ gerade und $F \subseteq E(G)$. Beweisen Sie:

    (a) Die Kantenmenge F hat einen nichtleeren Durchschnitt mit jedem T-Join dann und nur dann, wenn F einen T-Schnitt enthält.

    (b) Die Kantenmenge F hat einen nichtleeren Durchschnitt mit jedem T-Schnitt dann und nur dann, wenn F einen T-Join enthält.

27. Sei G ein ungerichteter Graph und und $T \subseteq V(G)$ mit $|T| = 2k$ gerade. Beweisen Sie, dass die minimale Kardinalität eines T-Schnittes in G gleich dem maximalen Wert von $\min_{i=1}^{k} \lambda_{s_i,t_i}$ für alle Einteilungen $T = \{s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k\}$ von T in Paare ist, wobei λ_{s_i,t_i} die maximale Anzahl der paarweise kantendisjunkten s-t-Wege ist. Lässt sich diese Max-Min-Formel für gewichtete Graphen verallgemeinern?

28. Zeigen Sie, dass das einfache perfekte minimal gewichtete 2-Matching Problem, d.h. die Bestimmung eines einfachen, perfekten, minimal gewichteten b-Matchings in einem ungerichteten Graphen G mit $b(v) = 2$, $\forall v \in V(G)$), in $O(|V(G)|^6)$ gelöst werden kann.