Kombinatorische Optimierung 2 SS 2015

1. Übungsblatt

1. Ein ungerichteter Graph mit mindestesn 2 Knoten heißt *k-fach kantenzusammenhängend*, falls er nach dem Entfernen von $k-1$ beliebigen Kanten immer noch zusammenhängend ist. Beweisen Sie folgende Aussage (Satz von Robbins): Ein Graph ist 2-fach kantenzusammenhängend dann und nur dann, wenn er eine Ohrenzerlegung besitzt (vgl. Satz von Whitney, siehe Vorlesung: `Ein ungerichteter Graph ist genau dann 2-fach Kanten zusammenhängend, wenn er eine echte Ohrenzerlegung hat`). Folgern Sie daraus und mit Hilfe des Satzes von Whitney, dass ein 2-fach zusammenhängender Graph 2-fach kantenzusammenhängend ist.

2. Betrachten Sie den Graphen G aus Abbildung 1.
   (a) Überprüfen Sie, dass G faktorkritisch ist.
   (b) Sei M ein fast perfektes Matching in G und sei a der durch M nicht gematchter Knoten in G. Konstruieren Sie eine M-alternierende ungerade Ohrenzerlegung von G in dem Sie die selben Schritte wie im Beweis des Satzes über die Charakterisierung faktorkritischer Graphen (vgl. Vorlesung), durchführen. Geben Sie die zu der konstruierten M-alternierenden Ohrenzerlegung gehörenden Funktionen μ und ϕ an (vgl. Vorlesung).
   (c) Geben Sie eine ungerade Ohrenzerlegung von G an, die nicht M-alternierend ist.

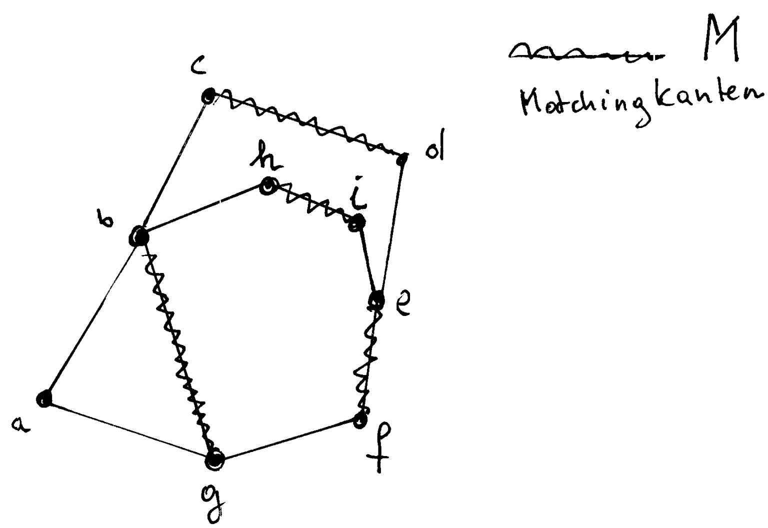

Abbildung 1: Inputgraph für Aufgabe 2

3. Beweisen Sie, dass alle ungeraden Ohrenzerlegungen eines faktorkritischen Graphen dieselbe Anzahl von Ohren haben.

4. Zeigen Sie, dass ein *minimaler faktorkritischer Graph* G (d.h. nach dem Entfernen irgendeiner Kante ist G nicht mehr faktorkritisch) höchstens $\frac{3}{2}(V(G)-1)$ Kanten hat. Zeigen Sie weiters, dass diese Schranke kleinstmöglich ist.

5. Sei G ein Graph mit $n := |V(G)|$ gerade, und für jede Menge $X \subseteq V(G)$ mit $|X| \leq \frac{3}{4}n$ gelte,

$$\left|\bigcup_{x\in X} \Gamma(x)\right| \geq \frac{4}{3}|X|,$$

wobei $\Gamma(v)$ die Menge der mit v benachbarten Knoten in G bezeichnet, für jeden $v \in V(G)$. Beweisen Sie, dass G ein perfektes Matching besitzt.

Hinweis: Sei S eine die Tutte-Bedingung verletzende Menge. Zeigen Sie, dass die Anzahl der einelementigen Zusammenhangskomponenten von $G - S$ höchstens $\max\{0, \frac{4}{3}|S| - \frac{1}{3}n\}$ ist. Dazu betrachte man die zwei Fälle, $|S| \geq \frac{n}{4}$ und $|S| < \frac{n}{4}$ separat.

6. Sei G ein faktorkritischer Graphen und M ein fast perfektes Matching in G, das den Knoten $r \in V(G)$ nicht matcht. Seien weiters $\mu, \phi \colon V(G) \to V(G)$ zwei zu einer M-alternierenden Ohrenzerlegung gehörende Funktionen. Zeigen Sie, dass der durch die Anfangsfolge von

$$x, \mu(x), \phi(\mu(x)), \mu(\phi(\mu(x))), \phi(\mu(\phi(\mu(x)))), \ldots$$

gegebene Weg einen M-alternierenden x-r-Weg gerader Länge für alle $x \in V(G)$ definiert.

7. Sei G ein faktorkritischer Graphen und M ein fast perfektes Matching in G, das den Knoten $r \in V(G)$ nicht matcht. Weiters seien $\mu, \phi \colon V(G) \to V(G)$ zwei Abbildungen für die $\mu(r) = \phi(r) = r$ gilt. Es wird angenommen, dass der durch die Anfangsteilfolge

$$x, \mu(x), \phi(\mu(x)), \mu(\phi(\mu(x))), \phi(\mu(\phi(\mu(x)))), \ldots$$

gegebene maximale Weg einen M-alternierenden x-r-Weg gerader Länge in G, für jedes $x \in V(G)$. Sind dann μ und ϕ zu einer M-alternierenden Ohrenzerlegung gehörende Funktionen?

8. Bestimmen Sie mit Hilfe des Edmonds Blossom-Algorithmus (dessen Pseudo-Code auf der Lehrveranstaltungshomepage oder in Korte und Vygen [1], Kapitel 10, zu finden ist) ein Matching mit maximaler Kardinalität für den Graphen in Abbildung 2. Bestimmen Sie die Edmonds-Gallai-Zerlegung von G.

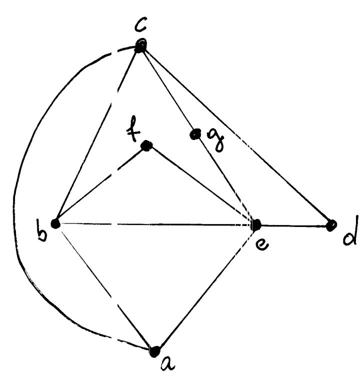

Abbildung 2: Inputgraph für Aufgabe 8

Literatur

[1] B. Korte und J. Vygen, *Kombinatorische Optimierung: Theorie und Algorithmen*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.