Kombinatorische Optimierung 2, SS 2010

3. Übungsblatt

17. Zeigen Sie: Eine nichtleere Teilmenge F eines Polyeders $P = \{x\colon Ax \leq b\}$ ist eine Seitenfläche von P, dann und nur dann, wenn für ein Subsystem $A^o x \leq b^o$ von $Ax \leq b$ die Gleichung $F = \{x \in P\colon A^o x = b^o\}$ gilt. Wenn F minimal (bzgl. Mengeninklusion), dann gilt, $\mathrm{Rang}(A^o) = \mathrm{Rang}(A)$.

    Hinweis: Eine Seitenfläche wird definiert als (nichtleerer) Schnitt des Polyeders mit einer stützenden Hyperebene.)

18. Sei P ein beschränktes Polyeder (d.h. ein Polytop). Zeigen Sie, dass P pointiert ist.

    Anmerkung: Die zu beweisende Aussage wurde in der Vorlesung im Beweis von Satz 2.9 „Ein Polytop ist die konvexe Hülle seiner Ecken." verwendet. Daher sollte Satz 2.9 für den Beweis der obigen Aussage nicht verwendet werden.

19. Sei P ein Polyeder und es gelte $P \subseteq \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}\colon \mathrm{x_i} \geq 0, \forall \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}$. Zeigen Sie, dass P pointiert ist.

20. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ eine endliche affin unabhängige Menge und sei $w \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x - w\colon x \in X\}$ affin unabhängig ist.

21. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}\colon \mathrm{Ax} \leq \mathrm{b}\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ und $b \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$. Sei $\bar{A}x = \bar{b}$ das System der implizierten Gleichungen aus $Ax \leq b$. Zeigen Sie, dass $dim(P) = n - p$, wobei $p := \mathrm{Rang}(\bar{A})$.

22. Sei F eine echte Seitenfläche eines Polyeders P. Zeigen Sie: F ist eine Facette dann und nur dann, wenn $dim(F) = dim(P) - 1$.

23. Zeigen Sie: eine endliche Menge $X \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ist affin unabhängig dann und nur dann, wenn $\forall \bar{x} \in X$ die Menge $\{x - \bar{x}\colon x \in (X \setminus \{\bar{x}\})\}$ linear unabhängig ist.

24. (a) Zeigen Sie: Ein Polytop P mit voller Dimension wird dann und nur dann von $Ax \leq b$ definiert, wenn $P \subseteq \{x\colon Ax \leq b\}$ und jede Facette von P von einer Ungleichung in $Ax \leq b$ induziert wird.

    (b) **Matchingpolytop Satz**
    Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Das Matchingpolytop $M(G)$ von G ist die konvexe Hülle der charakteristischen Vektoren aller Matchings in G. Zeigen Sie, dass $M(G)$ durch das untestehende System von Ungleichungen definiert wird:

    $$\begin{aligned} x(\delta(v)) &\leq 1, \ \forall v \in V \\ x(\gamma(S)) &\leq (|S| - 1)/2, \ \forall S \subseteq V, \ |S| \geq 3, \ |S| \text{ ist ungerade} \\ x_e &\geq 0, \ \forall e \in E, \end{aligned} \tag{1}$$

    wobei $\gamma(S) := \{(u, v) \in E\colon u \in S, v \in S\}, \forall S \subseteq V$.
    Hinweis: Verwenden Sie die Charakterisierung von Punkt (a) und zeigen Sie, dass jede Ungleichung, die eine Facette von $M(G)$ induziert, in (1) vertreten ist.

25. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $e \in E$. Zeigen Sie, dass $x_e \geq 0$ eine Facette des Matchingpolytops $M(G)$ induziert in dem Sie eine Menge von $|E|$ affin unabhängigen Vektoren in $M(G)$ konstruieren, für die $x_e = 0$ gilt.

26. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei V' die Menge jener Knoten $v \in V$, die eine der folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

    (i) $\deg_G(v) \geq 3$,

    (ii) $\deg_G(v) = 2$ und für die Nachbarn u, y von v gilt $(u, y) \notin E$,

(iii) $\deg_G(v) = 1$ und v gehört einer Zusammenhangskomponenten von G, die genau zwei Knoten besitzt.

Zeigen Sie, dass $\forall v \in V \setminus V'$, die Ungleichung $x(\delta(v)) \leq 1$ keine Facette des Matchingpolytops von G induziert. ($\delta(v)$ bezeichnet wie üblich die mit v inzidierenden Kanten in G und $x(\delta(v))$ ist die Summe alle x_e für $e \in \delta(v)$.)

27. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V'$, wobei V' wie im Übungsbeispiel 25 definiert wird. Zeigen Sie, dass $x(\delta(v)) \leq 1$ eine Facette des Matchingpolytops $M(G)$ induziert in dem Sie einen Vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^{|E|}$ ermitteln, sodass $\bar{x}$ alle Ungleichungen des Matchingpolytops $M(G)$ bis auf $\bar{x}(\delta(v)) \leq 1$ erfüllt. Es gilt also $\bar{x}(\delta(v)) > 1$.