Kombinatorische Optimierung 2, SS 2010

2. Übungsblatt

11. Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger gewichteter Graph. Für jede Kante $e \in E$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_e$ die Menge jener ungeraden Schnitte $\delta(S)$, für die $|S| > 1$ und $e \in \delta(S)$ gilt. Sei T ein im Laufe des Edmonds Algorithmus für das minimal gewichtetete perfekte Matchingsproblem erzeugter alternierender Baum. Weiters sei $v \in A(T)$ und seien w und u die Nachbarn von v in T. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}_{(w,u)} = \mathcal{C}_{(w,v)} \cup \mathcal{C}_{(v,u)}$ und $\mathcal{C}_{(w,v)} \cap \mathcal{C}_{(v,u)} = \emptyset$, dass heißt $\mathcal{C}_{(w,u)}$ ist die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{C}_{(w,v)}$ und $\mathcal{C}_{(v,u)}$.

12. Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter Graph mit Kantengewichten c_e, $\forall e \in E$. Sei $T \subseteq V$ eine Menge von Knoten in G. Eine Menge $S \subseteq V$ von Knoten in G, für die $|S \cap T|$ eine ungerade Zahl ist, heißt *T-ungerade*. Der Schnitt $\delta(S)$ heißt *T-Schnitt* wenn S eine T-ungerade Menge ist.

    (a) Zeigen Sie, dass der optimaler Wert des untenstehenden linearen Optimierungsproblems eine untere Schranke für das Gewicht eines T-joins in G ist.

    $$\begin{array}{lr} \min & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{u.d.NB} & \\ & X(D) \geq 1, \ \text{für alle } T\text{-Schnitte } D \text{ in G} \\ & x_e \geq 0, \ \forall e \in E \end{array}$$

    (b) Formulieren Sie das Duale zum linearen Optimierungsproblem aus (a).

    (c) Sei $c_e \geq 0$, $\forall e \in E$, $T = V$ und $|V|$ gerade, und J^* ein optimales T-Join in G. Zeigen Sie, dass es eine zulässige Lösung des dualen Problems aus (b) gibt, deren Zielfunktionswert gleich $c(J^*)$ ist.

    (d) Sei $c_e \geq 0$, $\forall e \in E$ und $T \subseteq V$, $|T|$ gerade. Zeigen Sie: Das minimale Gewicht eines T-Joins in G ist gleich dem optimalen Zielfunktionswert des linearen Optimierungsproblem aus (a).

    Hinweis: Führen das allgemeine T-Join Problem auf das V-Join Problem (siehe (c)) in einem folgendermaßen konstruierten gewichteten Graphen $G' = (V', E')$ zurück:
    $V' = V \cup \{v' : v \in V \setminus T\}$ und $V \cap \{v' : v \in V \setminus T\} = \emptyset$
    $E' = E \cup \{(v, v') : v \in V \setminus T\}$, und
    $c'_{e'} = c_{e'}$ falls $e' \in E$ und $c'_{e'} = 0$ falls $e' \in E' \setminus E$, $\forall e' \in E'$.

13. Bestimmen Sie eine optimale duale Lösung für das T-Join Problem in Abbildung 1 wobei T aus allen in Schwarz gemalten Knoten besteht.

14. Beweisen Sie: In einem bipartiten Graphen ist die minimale Kardinalität eines T-Joins gleich der maximalen Anzahl der Kanten disjunkten T-Schnitten.(Siehe Bsp. 12 für die Definition eines T-Schnitts.)

15. Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter Graph mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$. Das maximale Matchingsproblem sucht ein Matching mit maximalem Gewicht in G. Zeigen Sie, dass das maximale Matchingsproblem und das minimal gewichtete perfekte Matchingsproblem äquivalent sind. D.h. das maximale Matchingsproblem kann als minimal gewichtetes perfektes Matchingsproblem gelöst werden (eventuell nicht in den ursprünglichen sondern in einen neuen Graphen), und umgekehrt, das minimal gewichtete perfekte Matchingsproblem kann als maximales Matchingsproblem gelöst werden.

16. Sei $G = (V, E)$ ein k-kantenzusammenhängender Graph mit $k \geq 2$ (d.h. $G \setminus \{e\}$ ist zusammenhängend $\forall e \in E$). Zeigen Sie, dass es in G eine Briefträger-Menge mit Gewicht höchstens $\frac{1}{3}c(E)$ gibt.

    Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus Bsp. 12d.

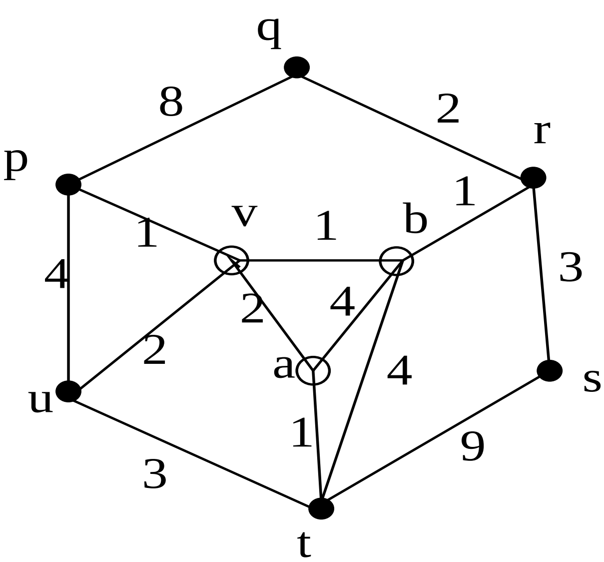

Abbildung 1