Kombinatorische Optimierung SS 2010

1. Übungsblatt

1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Knoten $v \in V$ heißt *unwesentlich* falls es in G ein maximum Matching M existiert, der v nicht matcht. Ein Knoten der nicht unwesentlich ist, heißt *wesentlich*. Sei $B \subseteq V$ die Menge der unwesentlichen Knoten in G. Sei $C \subseteq V \setminus B$ die Menge jener wesentlichen Knoten in G, die mit mindestens einen unwesentlichen Knoten inzidieren. Sei $D := V \setminus (B \cup C)$. $\{B, C, D)\}$ heißt *Gallai-Edmonds Partition* von G. Zeigen Sie:
   (a) C minimiert die rechte Seite der Tutte-Berge Formel.
   (b) Für jedes maximum Matching M und jeden Knoten $v \in C$, gibt es eine Kante $(v, w) \in M$ für die $w \in B$ gilt.
   (c) Jedes maximum Matching enthält ein perfektes Matching von $G[D]$, wobei $G[D]$ der von der Knotenmenge D induzierter Subgraph in G ist.

2. Verwenden Sie die in der Vorlesung besprochene Charakterisierung der Graphen, die ein perfektes Matching besitzen, (Satz 1.2, genannt auch „Tutte's Matching Theorem") um den folgenden Satz von Petersen zu beweisen:

   Ein 3-regulärer Graph $G = (V, E)$ (d.h. jeder Knoten hat Grad 3) in dem $\forall e \in E$, $G \setminus e$ zusammenhängend ist, besitzt ein perfektes Matching.

3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne isolierte Knoten. Eine *Kantenüberdeckung* in G ist eine Menge $D \subseteq E$ von Kanten, sodass jeder Knoten aus V mit mindestens einer Kante aus D inzidiert. Wie lässt sich eine Kantenüberdeckung mit minimaler Anzahl von Kanten ausgehend von einem maximum Matching in G bestimmen? Zeigen Sie, dass die minimale Kardinalität einer Kantenüberdeckung $|V| - \nu(G)$ ist.

4. Beweisen Sie Proposition 1.6 aus der Vorlesung:

   Nach der Terminierung der Kontraktion-Routine (vgl. Vorlesung) ist M' ein Matching in G', T ein M'-alternierender Baum in G', und $C \in B(T)$.

5. Seien $T_1, \ldots, T_k$, die im Laufe des Edmonds Algorithmus (für das maximum Matching Problem) konstruierten verkümmerten alternierenden Bäume. Sei $B := \cup_{i=1}^{k} B(T_i)$ und $B' = \cup_{v \in b} S(v)$. Zeigen Sie, dass B' mit der Menge der unwesentlichen Knoten in G übereinstimmt.

6. Bestimmen Sie ein maximales Matching in dem Graphen aus Abbildung 1. Weiters bestimmen Sie eine Menge $A \subseteq V$, die die rechte Seite der Tutte-Berge Formel minimiert.

7. Bestimmen Sie die Gallai-Edmonds Partition für den Graphen aus Abbildung 1.

8. Zeigen Sie: Das Problem LP_{MinPMP} (vgl. Vorlesung) besitzt eine zulässige Lösung dann und nur dann, wenn es eine Menge von Kanten E_1 und eine Menge von ungeraden Kreisen $\mathcal{C}$ gibt, sodass für jeden Knoten v des Graphen entweder Aussage (a) oder Aussage (b), jedoch nicht beide, gelten:
   (a) v gehört zu genau einem der Kreise aus $\mathcal{C}$,
   (b) v inzidiert mit genau einer Kante aus E_1.

9. Bestimmen Sie ein minimal gewichtetes perfektes Matching und eine optimale Lösung des dualen Problems (vgl. Vorlesung) für den Graphen aus Abbildung 2.

10. Zeigen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Edmonds, dass ein Graph G dann und nur dann ein perfektes Matching besitzt, wenn das dazugehörige LPC_{MinPMP} Problem (vgl. Vorlesung) eine zulässige Lösung besitzt.

    Hinweis für die „Wenn"Richtung: Ziegen Sie, dass das duale Problem unbeschränkt ist, wenn G kein perfektes Matching besitzt.

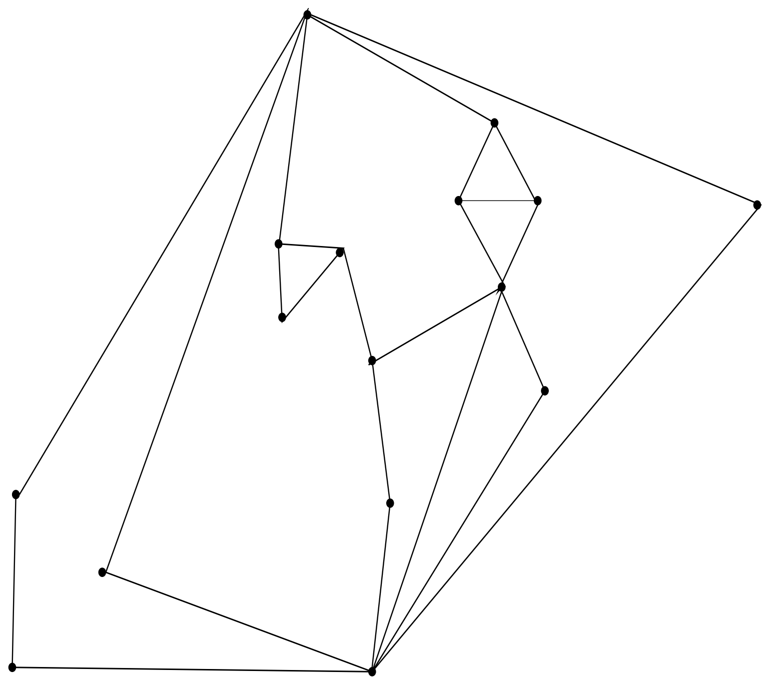

Abbildung 1

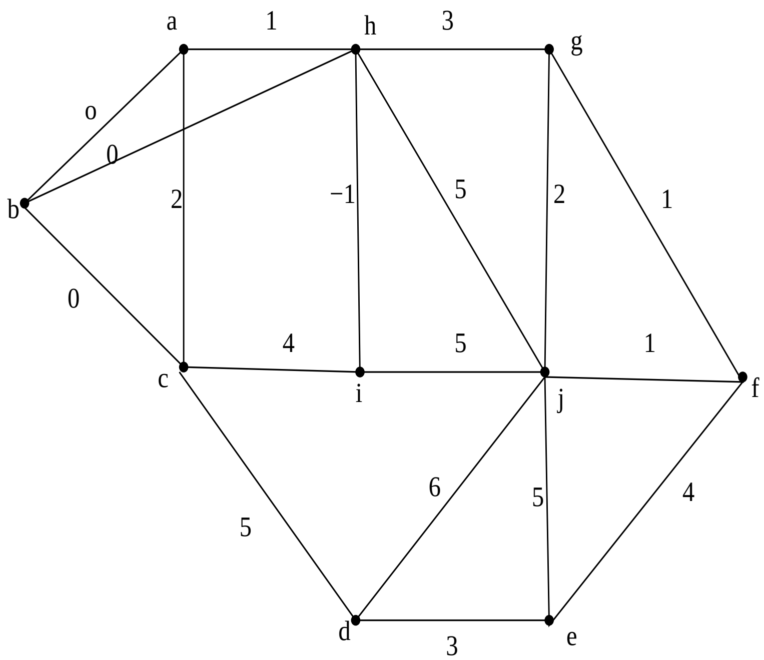

Abbildung 2