Kombinatorische Optimierung 1 WS 2010/2011
3. Übungsblatt

22. Kürzeste Wege in azyklischen Graphen.

    Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $n := |V|$. Eine topologische Sortierung in G ist eine bijektive Abbildung $f\colon V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft $f(i) < f(j)$ für alle $(i, j) \in E$.

    (a) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, der keine gerichteten Kreise enthält. Ein solcher Graph heißt *kreisfrei* oder *azyklisch*. Verwenden Sie ein Tiefensuche-Verfahren um eine topologische Sortierung f in G in linearer Zeit zu bestimmen. Zeigen Sie, dass die durch das Tiefensuche-Verfahren bestimmte Abbildung f keine topologische Sortierung in G ist, falls der Inputgraph G einen gerichteten Kreis enthält. Somit liegt auch ein linearer Algorithmus zur Erkennung der Kreisfreiheit eines Graphen vor.

    (b) Modifizieren Sie den Moore-Bellman-Ford Algorithmus so, dass er im Falle von azyklischen Graphen die kürzesten Wege von einer Quelle aus und deren Längen in linearer Zeit bestimmt.

    (c) Betrachten wir nun das sogenannte Längste-Wegeproblem: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und zwei Knoten $s, t \in V$. Gesucht sei der längste $s-t$-Weg in G. Können Sie für dieses Problem einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit angeben? Wie lautet die Antwort der obigen Frage wenn der Inputgraph $G = (V, E)$ azyklisch ist?

23. Das Minimum-Mean-Cycle-Problem.

    Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichten $c\colon E \to \mathbb{R}$. Gesucht wird ein Kreis K, dessen durchschnittliches Kantengewicht $\frac{c(E(K))}{|E(K)|}$ minimal ist, oder der Nachweis, dass G azyklisch ist. Hier ist $E(K)$ die Menge der Kanten in K und $c(E(K)) := \sum_{e \in E(K)} c(e)$. Wir bezeichnen mit $\mu(G, c)$ das minimale durchschnittliche Kantengewicht der Kreise in G. Falls G azyklisch, dann setzen wir $\mu(G, c) := \infty$.

    (a) Sei $s \in V$ ein Knoten in G von dem aus alle anderen Knoten in G erreichbar sind. Für $x \in V$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $F_k(x)$ das minimale Gewicht einer Wanderung der Länge k von s nach x und $F_k(x) := \infty$ falls es keine solche Wanderung gibt. Das heißt folgende Gleichung gilt

    $$F_k(x) = \min \left\{ \sum_{i=1} kc((v_{i-1}, v_i))\colon v_0 = s, v_k = x, (v_{i-1}, v_i) \in E \text{ für alle } i = 1, 2, \ldots, k \right\} .$$

    Zeigen Sie, dass

    $$\mu(G, c) = \min_{x \in V(G)} \max_{\substack{0 \le k \le n-1 \\ F_k(x) \text{ endlich}}} \frac{F_n(x) - F_k(x)}{n - k} ,$$

    mit der Konvention, dass das Minimum einer leeren Menge ∞ ist.

    Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Aussage für $\mu(G, c) = 0$ gilt, und führen Sie den allgemeinen Fall durch passende Modifikation der Kantengweichte auf den obigen Sonderfall zurück.

    (b) Basierend auf der in (a) bewiesenen Gleichung geben Sie einen Algorithmus zur Lösung des Minimum-Mean-Cycle-Problems an und analysieren Sie seine Laufzeit.

    Hinweis: Das Minimum-Mean-Cycle-Problem wird im Buch von Korte und Vygen behandelt:

    B. Korte und J. Vygen, *Kombinatorische Optimierung: Theorie und Algorithmen*, Springer, 2008.

24. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt im Graphen in Abbildung 1. Die Zahlen auf den Kanten geben dabei die Kapazitäten an. Starten Sie den Algorithmus mit dem folgenden Fluss:

Kante	s-1	s-2	s-3	1-2	2-3	1-t	2-t	3-t
Fluss	8	8	0	2	2	6	8	2

Geben Sie den optimalen Flusswert explizit an!

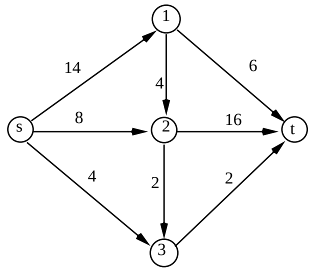

Abbildung 1: Netzwerk für Bsp. 24

25. Sei $N = (G, c, l, s, t)$ ein Netzwerk mit Quelle s, Senke t und oberen und unteren Kantenkapazitäten $c(i,j)$ bzw. $l(i,j)$. Gesucht ist ein Fluss $f(i,j)$, der die Flusserhaltungsgleichungen und $0 \leq l(i,j) \leq f(i,j) \leq c(i,j)$ erfüllt.

    (a) Zeigen Sie, dass dieses Problem auf ein gewöhnliches maximales Flussproblem transformiert werden kann.

    (b) Finden Sie mit Hilfe der Transformation aus (a) einen zulässigen Fluss für das Netzwerk mit unteren und oberen Kantenkapazitäten in Abbildung 2.

    (c) Geben Sie ein Verfahren an, das ausgehend von einem zulässigen Fluss, einen maximalen Fluss für das modifizierte Problem findet.

    (d) Testen Sie diesen Algorithmus am Netzwerk in Abbildung 2 und starten Sie mit der Ausgangslösung $f(s,2) = 3$, $f(3,s) = 1$, $f(2,3) = 1$, $f(3,2) = 4$, $f(2,4) = 6$, $f(4,3) = 5$, $f(3,t) = 1$, $f(4,t) = 1$.

    (e) Verallgemeinern Sie den Satz von Ford und Fulkerson auf Netzwerke mit oberen und unteren Kantenkapazitäten.

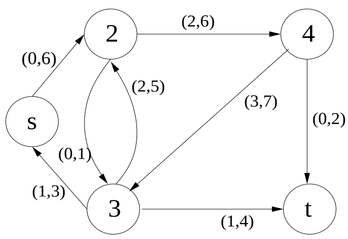

Abbildung 2: untere Kapazitätsschranken