Name: **Matrikelnummer:**

Nachklausur zu 1. Übungsklausur
Kombinatorische Optimierung 1

WS 2010-2011

4. März 2011

Aufgabe:	1	2	3	4		
Punkte:	3	2	3	2		
					=	*Punkte*

Alle Rechen- bzw. Argumentationsschritte sind anzugeben und alle Antworten zu begrnden!

1. Für einen Spannbaum T eines Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichtsfunktion c: $E \to \mathbb{R}$ sei $L(T)$ die sortierte Liste seiner Kantengewichte, d.h. $L(T) = (c(e_1), c(e_2), \ldots, c(e_{n-1}))$ mit $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots \leq c(e_{n-1})$, wobei $E(T) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ die Kantenmenge von T ist.

   Zeigen Sie: Sind T_1 und T_2 minimale Spannbäume von G, so gilt $L(T_1) = L(T_2)$. Folgern Sie daraus, dass der minimale Spannbaum eines gewichteten Graphen mit injektiver Kantengewichtsfunktion eindeutig ist.

2. Das Geldwechsel-Problem

   Gegeben sind eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ (p stellt einen Geldbetrag dar) und k weitere paarweise unterschiedliche natürliche Zahlen a_1, a_2,..., a_k (jede dieser Zahlen stellt den Wert einer Münze oder einer Banknote dar). Die Frage lautet ob der Geldbetrag p in Münzen und Banknoten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gewechselt werden kann, d.h. ob es nichtnegative ganze Zahlen x_i, $1 \leq i \leq k$, gibt, sodass $p = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i$. Zum Beispiel wenn $k = 3$ und $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ und $a_3 = 7$, dann können wir jeden Geldbetrag aus der Menge $\{8, 12, 54\}$ wechseln, aber einen Geldbetrag von 4 Währungseinheiten können wir nicht wechseln. Für $p = 58$ wäre $x_1 = 1$, $x_2 = 11$ und $x_3 = 0$ eine Lösung des Problems, d.h. eine Wechselstrategie die 12 Münzen bzw. Banknoten involviert.

   (a) Wie würden Sie das Geldwechsel Problem für einen gegebenen Input $p, a_1, a_2, \ldots, a_k$ lösen? Geben Sie einen effizienten Algorithmus zur Ermittlung einer Wechselstrategie, die die kleinstmögliche Anzahl von Münzen und Banknoten involviert.

   (b) Beschreiben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus um zu bestimmen, welche (ganzzahlige) Geldbeträge aus einem gegebenen Intervall (α, β) in den gegebenen Münzen und Banknoten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gewechselt werden können.

3. (a) Bestimmen Sie für den Graphen in Abbildung 1 die kürzesten Wege für alle Knotenpaare.

   (b) Angenommen die Länge der Kante $(3, 1)$ wurde überschätzt: die tatsächliche Länge sei nicht 5 sondern 3. Geben Sie die minimale Anzahl von `IF`-Abfragen an, die der Floyd-Warshall Algorithmus durchführen würde eher er einen negativen Kreis entdeckt.

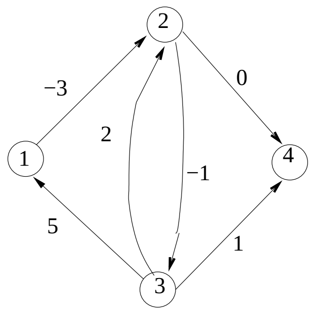

Abbildung 1: Graph zu Aufgabe 3

4. Betrachten Sie das Straßennetz in Abbildung 2. Die Kantengewichte stellen die maximale Steigung des jeweiligen Straßenstücks dar. Ein steigungaverser Autofahrer (!) möchte von Punkt 1 zum Punkt 12 in diesem Netzt gelangen. Finden Sie einen optimalen Weg für diesen Autofahrer, d.h. einen Weg mit kleinstmöglicher maximaler Steigung, mit Hilfe eines Algorithmus zur Lösung des minimalen Spannbaumproblems. Beweisen Sie die Korrektheit ihres Verfahrens und geben Sie die Zeitkomplexität an.

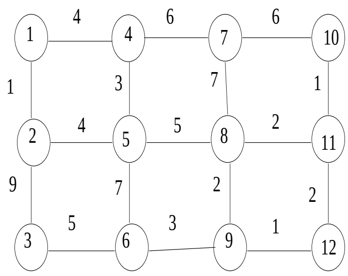

Abbildung 2: Graph zu Aufgabe 4