Name: **Matrikelnummer:**

1. Übungsklausur - Kombinatorische Optimierung 1

WS 2010-2011

19. November 2010

Aufgabe:	1	2	3	4		
Punkte:	3	2	2	3		
					=	*Punkte*

Alle Rechen- bzw. Argumentationsschritte sind anzugeben und alle Antworten zu begrnden!

1. **Zuverlässigste Wege.**

   Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, der ein Kommunikationsnetz modelliert: die Knoten sind Schnittstellen und die (gerichteten) Kanten sind unidirektionale Kommunikationslinks. Für jede Kante $(i, j) \in E$ ist eine Wahrscheinlichkeit $p(i, j) \in (0, 1)$ bekannt, mit der die Verbindung (i, j) ausfällt. Wir nehmen an, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Kanten voneinander unabhängig sind. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der zu zwei gegebenen Knoten $s, t \in V$ einen zuverlässigsten Weg P von s nach t bestimmt, d.h. einen Weg P, für den die Ausfallwahrscheinlichkeit minimal ist.

   Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass ein s-t-Weg *nicht* ausfällt. Lösen Sie dann das dazugehörige Maximierungsproblem in dem Sie es auf ein klassisches Kürzeste-Wege-Problem zurückführen.

2. Bestimmen Sie für den Graphen in Abbildung 1 eine minimal-gewichtete Arboreszenz mit Wurzel im Knoten 1. Die Zahlen neben den Kanten sind die Kantengewichte.

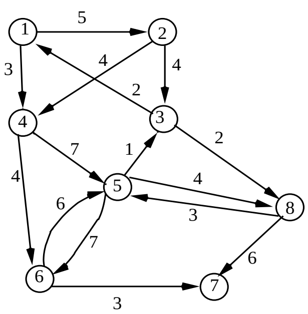

Abbildung 1: Graph zu Aufgabe 2

3. Bestimmen Sie im untenstehenden Graphen die kürzesten Wege von Knoten 6 zu allen anderen Knoten mit Hilfe eines *möglichst effizienten* Algorithmus. Geben Sie die kürzesten Wege und deren Längen explizit an. Welche Zeitkomplexität hat ihr Algorithmus?

   Falls Sie einen Algorithmus verwenden, der weder in der Vorlesung noch in den Übungen besprochen wurde, dann müssen Sie einen Beweis der Korrektheit und eine ausführliche Analyse der Zeitkomplexität angeben.

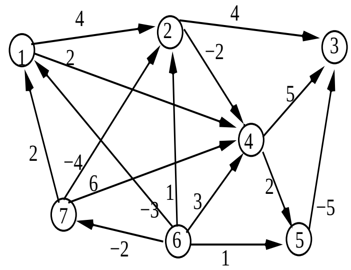

Abbildung 2: Graph zu Aufgabe 3

4. Abpflückordnungen

   (a) Beweisen Sie, dass jeder Baum T mit mindestens 2 Knoten (d.h. $|V(T)| \geq 2$) mindestens zwei Bläter, d.h. mindestens zwei Knoten mit Grad 1, besitzt.

   (b) Beweisen Sie, dass ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V(G)| \geq 2$ genau dann ein Baum ist, wenn es eine sogenannte „Abpflückordnung" seiner Knoten gibt, d.h. eine Ordnung $v_1, \ldots, v_n$ der Knoten, so dass die Ecke v_i den Grad 1 im induzierten Subgraphen $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ besitzt, für alle $i = 2, \ldots, n$.