Kombinatorische Optimierung 1 WS 2012/2013
5. Übungsblatt

36. Sei G ein Digraph mit Kantenkapazitäten $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ und Balance-Werten $b\colon V(G) \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$. Beweisen Sie, dass es genau dann einen b-Fluss gibt, wenn folgende Ungleichung gilt:
$$\sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \geq \sum_{v \in X} b(v) \text{ für alle } X \subseteq V(G)\,.$$

37. Sei G ein Digraph mit unteren und oberen Kantenkapazitäten $l, u\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$, wobei $l(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$, und seien $b_1, b_2\colon V(G) \to \mathbb{R}$ mit $b_1(v) \leq b_2(v)$ für alle $v \in V(G)$ und $\sum_{v \in V(G)} b_1(v) \leq 0 \leq \sum_{v \in V(G)} b_2(v)$.

    (a) Beweisen Sie, dass es genau dann einen Fluss f mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und
    $$b_1(v) \leq \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) \leq b_2(v) \text{ für alle } v \in V(G)$$
    gibt, wenn
    $$\sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \geq \max\left\{ \sum_{v \in X} b_1(v), - \sum_{v \in V(G) \setminus X} b_2(v) \right\} + \sum_{e \in \delta^-(X)} l(e)$$
    für alle $X \subseteq V(G)$.

    (b) Betrachten Sie das in (a) beschriebene Problem erweitert um eine Kostenfunktion $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Wie findet man einen Fluss, der die Bedingungen von (a) erfüllt und die Kosten minimiert?
    Hinweis: Führen Sie dieses Problem auf ein Minimales-Kosten-Fluss-Problem zurück.

38. (a) Lösen Sie das in der Abbildung 1 gegebene MKFP mit Hilfe des MMCC-Algorithmus, wobei für jede Kante (i, j) die Kapazitäten und die Kosten $(u(i, j), c(i, j))$ und für jeden Knoten die Nachfrage bzw. das Angebot $b(v)$ gegeben sind. Verwenden Sie dabei folgenden Startfluss: $f(1, 3) = 1, f(3, 4) = 3, f(3, 5) = 2, f(2, 3) = 4, f(5, 2) = 8$.

    (b) Geben Sie für den optimalen Fluss f zulässige Knotenpotentiale $\pi(v)$ an und überprüfen Sie, dass $c_\pi(e) \geq 0$ für alle $e \in E(G_f)$.

39. Lösen Sie das in der Abbildung 1 gegebene MKFP mit Hilfe des kürzesten augmentierenden Wegealgorithmus.

40. Lösen Sie das in der Abbildung 2 gegebene MKFP mit Hilfe des kürzesten augmentierenden Wegealgorithmus und achten Sie darauf, dass die Kantenlängen durch geeignete Knotenpotentiale immer positiv bleiben! Auf den Kanten (i, j) sind wieder die Werte $(u(i, j), c(i, j))$ gegeben.

41. Betrachten Sie das minimale Kostenflussproblem mit möglichen unendlichen Kapazitäten, d.h. $u(e) = +\infty$ für manche Kanten e.

    (a) Zeigen Sie, dass eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn sie zulässig ist und es einen negativen Kreis gibt, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.

(b) Zeigen Sie, dass es in $O(n^3+m)$ Zeit entschieden werden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, dass in einer nicht unbeschränkten Instanz, jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann.

42. Betrachten Sie das lineare Programm $\max\{c^t x \colon Ax \leq b\}$ wobei $x \in \mathbb{R}^m$, $A \in \{-1, 0, 1\}^{n \times m}$ und jede Spalte von A höchstens eine 1 und höchstens eine -1 enthält. Zeigen Sie, dass ein solches lineares Programm zu einer Instanz des minimalen Kostenflussproblems äquivalent ist.

    Hinweis: Unterscheiden Sie zwei Fälle, wenn das gegebene lineare Programm beschränkt bzw. unbeschränkt ist.

43. (Für Ambitionierte.)
    Gegeben sei ein Netzwerk (G, u, s, t) mit einem Digraphen G, eine Kapazitätfunktion $u \colon E(G) \to \mathbb{R}_+$, eine Quelle s, eine Senke t, nicht-negativen ganzzahligen Transitzeiten $l \colon E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$. Ein *zeitabhängiger s-t-Fluss* (oder *dynamischer s-t-Fluss*) ist eine Familie f von Lebesgue-messbaren Funktionen $f_e \colon [0, T] \to \mathbb{R}_+$ für jedes $e \in E(G)$, mit $f_e(\tau) \leq u_e$, $\forall \tau \in [0, T]$, $\forall e \in E(G)$, sowie

$$ex_f(v, a) := \sum_{e \in \delta^-(v)} \int_0^{max\{0, a - l(e)\}} f_e(\tau) d\tau - \sum_{e \in \delta^+(v)} \int_0^a f_e(\tau) d\tau \geq 0$$

    für alle $v \in V(G) \setminus \{s\}$ und $a \in [0, T]$.
    Seien weiters eine Zahl $V \in \mathbb{R}_+$ und Kosten $c \colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ gegeben. Gesucht wird nun ein zeitabhängiger s-t-Fluss mit Wert $ex_f(t, T) = V$ und minimalen Kosten $\sum_{e \in E(G)} c(e) \int_0^T f_e(\tau) d\tau$. Zeigen Sie, dass man den gesuchten zeitabhängigen Fluss in polynomialer Zeit ermitteln kann, falls T eine Konstante ist.

    Hinweis: Betrachten Sie ein zeiterweitertes Netzwerk mit einer Kopie von G für jeden diskreten Zeit-Schrit (siehe auch Abschnitt 9.7 in *B. Korte und J. Vygen, Kombinatorische Optimierung: Theorie und Algorithmen, Springer 2008*).

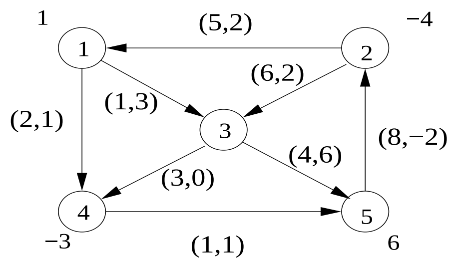

Abbildung 1: MKFP für Aufgabe 38 und 39

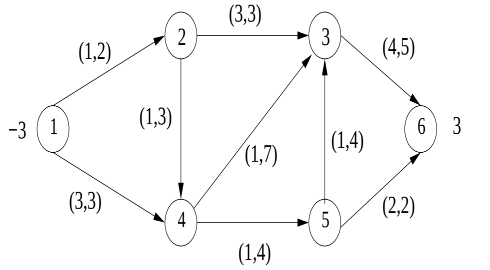

Abbildung 2: MKFP für Aufgabe 40