Kombinatorische Optimierung 1 WS 2012/2013
4. Übungsblatt

31. Verwenden Sie den Push-Relabel Algorithmus zur Bestimmung eines maximalen s-t-Flusses im Netzwerk in Abbildung 1. Die Zahlen neben den Kanten sind die Kantenkapazitäten. Führen Sie folgende zwei Varianten des Algorithmus durch:

    (a) Die aktiven Knoten werden in einer FIFO Liste („First In First Out“ gespeichert. Neue aktiv gewordene Knoten werden am Ende der Liste hinzugefügt. Die aktuelle Push/Relabel Iteration wird stets am ersten aktiven Knoten in der Liste durchgeführt. Für jeden aktiven Knoten v wird auch eine FIFO Liste der mit v inzidierenden Kanten in G_f geführt. Die aktuelle Push Operation wird stets über die erste erlaubte Kante in der Liste des ausgewählten aktiven Knoten durchgeführt.

    (b) Es wird immer der aktive Knoten mit der höchsten Distanzmarkierung ausgewählt. Die Auswahl der Kante für die Push-Operation erfolgt mit Hilfe einer FIFO Liste wie in der Variante (a).

    Vergleichen Sie die Anzahl der Relabel, saturierende-Push und nicht-saturierende-Push Operationen in den beiden Varianten des Algorithmus.

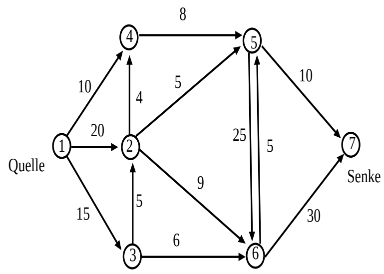

Abbildung 1: Netzwerk für Bsp. 31 und 32

32. Wenden Sie den Gomory-Hu-Algorithmus an, um den Gomory-Hu-Baum für das Netzwerk in Abbildung 1 zu bestimmen. Die Zahlen neben den Kanten sind die Kantenkapazitäten.

33. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk mit Kapazitäten $u\colon E(G) \to \mathbb{Z}_+$. In diesem Graph wird jener minimaler s-t-Schnitt gesucht, der unter allen minimalen s-t-Schnitten die geringste Anzahl von Kanten besitzt. Zeigen Sie, dass ein minimaler s-t-Schnitt in $(G, \bar{u}, s, t)$ mit $\bar{u}(e) = |E(G)|u(e) + 1$, $\forall e \in E(G)$, ein minimaler s-t-Schnitt mit der kleinsten Anzahl von Kanten in (G, u, s, t) ist.

34. (Unerlässlichste Kanten)
    Sei e eine Kante eines Netzwerks (G, u, s, t) und $\Delta_e := W - W_e$, wobei W der Wert eines maximalen s-t-Flusses in (G, u, s, t) und W_e der Wert eines maximalen s-t-Flusses in $(G \setminus \{e\}, u, s, t)$ ist. Eine Kante $\bar{e} \in E(G)$ mit $\Delta_{\bar{e}} = \max\{\Delta_e \colon e \in E(G)\}$ heißt unerlässlichste Kante in (G, u, s, t). Beweisen oder widerlegen Sie anhand von Gegenbeispielen die folgenden Aussagen:

    (a) Wenn e eine unerlässlichste Kante ist, dann hat e die maximale Kapazität über alle Kanten in $E(G)$.

    (b) Wenn e eine unerlässlichste Kante ist, dann ist e eine Kante mit maximalem Flusswert in einem maximalen s-t-Fluss in (G, u, s, t).

(c) Sei e eine unerlässlichste Kante. Dann existiert ein maximaler s-t-Fluss f, sodass e eine Kante in jenem minimalem s-t-Schnitt ist, der durch die von s aus erreichbaren Knoten im Residualgraphen G_f definiert wird. Weiters ist $f(e)$ der höchste Flusswert unter allen Kanten des oben genannten Schnittes.

(d) Eine Kante, die keinem minimalen s-t-Schnitt gehört, ist keine unerlässlichste Kante in (G, u, s, t).

(f) Ein Netzwerk kann mehrere unerlässlichste Kanten besitzen.

35. (Sicherheit von statistischen Daten)
Angenommen es werden statistische Daten in Form einer $p \times q$ Matrix $D = (d_{ij})$ veröffentlicht. Seie $r(i)$ $(c(j))$ die Summe der Einträge in der i-ten Zeile (in der j-ten Spalte) der Matrix D und es gelte $r(i) > 0$ für alle $i = 1, 2, \dots, p$ und $c(j) > 0$ für alle $j = 1, 2, \dots, q$. Die Zeilen- und Spaltensummen von D sowie einige Einträge $d_{i,j}$ mit $(i, j) \in Y \subset \{1, 2, \dots p\} \times \{1, 2, \dots, q\}$ sollen veröffentlicht werden. Die Einträge d_{ij} mit $(i, j) \notin Y$ sind jedoch vertraulich und dürfen nicht veröffentlicht werden. Es kann nun sein, dass der Wert eines vertraulichen Eintrags d_{ij} aus den Zeilen- und Spaltensummen sowie den Werten einiger anderen veröffentlichten Einträge eindeutig ermittelt werden kann. In diesem Fall ist der vertrauliche Eintrag d_{ij} *ungeschützt*. Beschreiben Sie einen polynomialen Algorithmus um alle ungeschützten vertraulichen Einträge zu identifizieren und deren Werte zu ermitteln.