Kombinatorische Optimierung 1 WS 2012/2013
3. Übungsblatt

23. Kürzeste Wege in azyklischen Graphen.

    Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $n := |V|$. Eine topologische Sortierung in G ist eine bijektive Abbildung $f\colon V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft $f(i) < f(j)$ für alle $(i, j) \in E$.

    (a) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, der keine gerichteten Kreise enthält. Ein solcher Graph heißt *kreisfrei* oder *azyklisch*. Verwenden Sie ein Tiefensuche-Verfahren um eine topologische Sortierung f in G in linearer Zeit zu bestimmen. Zeigen Sie, dass die durch das Tiefensuche-Verfahren bestimmte Abbildung f keine topologische Sortierung in G ist, falls der Inputgraph G einen gerichteten Kreis enthält. Somit liegt auch ein linearer Algorithmus zur Erkennung der Kreisfreiheit eines Graphen vor.

    (b) Modifizieren Sie den Moore-Bellman-Ford Algorithmus so, dass er im Falle von azyklischen Graphen die kürzesten Wege von einer Quelle aus und deren Längen in linearer Zeit bestimmt.

    (c) Betrachten wir nun das sogenannte Längste-Wegeproblem: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und zwei Knoten $s, t \in V$. Gesucht sei der längste $s-t$-Weg in G. Können Sie für dieses Problem einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit angeben? Wie lautet die Antwort der obigen Frage wenn der Inputgraph $G = (V, E)$ azyklisch ist?

24. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt im Graphen in Abbildung 1. Die Zahlen auf den Kanten geben dabei die Kapazitäten an. Starten Sie den Algorithmus mit dem folgenden Fluss:

Kante	s-1	s-2	s-3	1-2	2-3	1-t	2-t	3-t
Fluss	8	8	0	2	2	6	8	2

    Geben Sie den optimalen Flusswert explizit an!

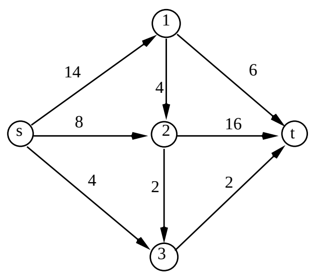

Abbildung 1: Netzwerk für Bsp. 24

25. Sei $N = (G, c, l, s, t)$ ein Netzwerk mit Quelle s, Senke t und oberen und unteren Kantenkapazitäten $c(i, j)$ bzw. $l(i, j)$. Gesucht ist ein Fluss $f(i, j)$, der die Flusserhaltungsgleichungen und $0 \le l(i, j) \le f(i, j) \le c(i, j)$ erfüllt.

    (a) Zeigen Sie, dass dieses Problem auf ein gewöhnliches maximales Flussproblem transformiert werden kann.

(b) Finden Sie mit Hilfe der Transformation aus (a) einen zulässigen Fluss für das Netzwerk mit unteren und oberen Kantenkapazitäten in Abbildung 2.

(c) Geben Sie ein Verfahren an, das ausgehend von einem zulässigen Fluss, einen maximalen Fluss für das modifizierte Problem findet.

(d) Testen Sie diesen Algorithmus am Netzwerk in Abbildung 2 und starten Sie mit der Ausgangslösung $f(s,2) = 3$, $f(3,s) = 1$, $f(2,3) = 1$, $f(3,2) = 4$, $f(2,4) = 6$, $f(4,3) = 5$, $f(3,t) = 1$, $f(4,t) = 1$.

(e) Verallgemeinern Sie den Satz von Ford und Fulkerson auf Netzwerke mit oberen und unteren Kantenkapazitäten.

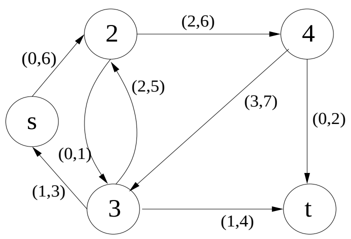

Abbildung 2: untere Kapazitätschranken

26. Zeigen Sie, dass man einen blockierenden Fluss in einem azyklischen Netzwerk (G, u, s, t) in $O(nm)$ Zeit ermittlen kann, wobei $n := |V(G)|$ und $m := |E(G)|$. Bestimmen Sie algorithmisch einen blockierenden Fluss für den Level-Graphen in Abbildung 3.

27. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk und f ein s-t-Fluss in G, so dass der Null-Fluss f' in G_f, d.h. $f'(e) = 0$, $\forall e \in E(G_f)$, ein blockierender Fluss in G_f ist. Zeigen Sie, dass f ein maximaler s-t-Fluss ist.

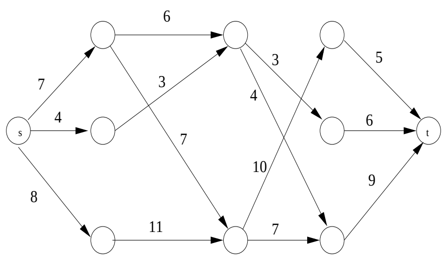

Abbildung 3: Blockierender Fluss für Bsp. 26

28. Betrachten Sie folgendes Problem. Es gibt n Arbeiten und m Personen um diese Arbeiten zu erledigen. Für jede Arbeit i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sei $S_i \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ die Menge der Personen, die an der Arbeit i arbeiten können. Weiters sei t_i, die zu Erledigung der Arbeit i benötigte Arbeitszeit. Es wird angenommen, dass alle Personen, die an einer Arbeit arbeiten können, jeden beliebigen Anteil dieser Arbeit erledigen können und immer gleich schnell arbeiten. Es dürfen nicht mehrere Personen gleichzeitig an einer Arbeit arbeiten, und es dürfen auch nicht mehrere Arbeiten gleichzeitig von einer Person bearbeitet werden. Das Ziel ist es, eine Zuordnung der Personen zu den Arbeiten zu bestimmen, sodass alle Arbeiten in minimaler Zeit erledigt werden.

    Zeigen Sie, das dieses Problem als Folge von maximalen Flussproblemen gelöst werden kann.

29. (Für Ambitionierte.)
    Beweisen den „max-flow-min-cut"-Satz mit Hilfe der Dualitätstheorie der linearen Optimierung.

    (a) Fügen Sie dem Inputnetzwerk (G, u, s, t) eine fiktive Kante (t, s) hinzu und modellieren Sie die Bestimmung einer Zirkulation mit maximalem Flusswert auf der Kante (t, s) als lineares Optimierungsproblem. Dieses Problem ist natürlich äquivalent zur Bestimmung eines maximalen s-t-Flusses

    (b) Formulieren Sie das Duale Problem des Linearen Problems aus (a). Zeigen Sie, dass dieses Problem eine ganzzahlige Optimallösung besitzt.

    (c) Betrachten Sie eine ganzzahlige Optimallösung des dualen Problems aus (b), in der die zum Knoten s zugehörige Dualvariable gleich Null ist. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser optimalen Duallösung einen s-t-Schnitt, dessen Kapazität gleich dem Wert des maximalen Flüsses ist.

30. (Für Ambitionierte.)

    (a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford und Fulkerson im Falle von irrationalen Kapazitäten nicht zwangsweise terminiert. Betrachten Sie dazu das Netzwerk aus Abbildung 4. Alle Liniensegmente sind Kanten in beiden Richtungen. Jede Kante hat Kapazität $\frac{1}{1-\sigma}$ bis auf die folgenden 4 Kanten mit den Kapazitäten:

    $$u((x_1, y_1)) = 1\,,\ u((x_2, y_2)) = \sigma\,,\ u((x_3, y_3)) = u((x_4, y_4)) = \sigma^2$$

    wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Beachten Sie, dass $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge $(v(f_i))_{i \in \mathbb{N}}$ wobei $v(f_i)$ der Wert des in der i-ten Iteration generierten Flusses ist.

    (b) Lösen Sie das obige Problem mit dem Algorithmus von Edmonds und Karp.

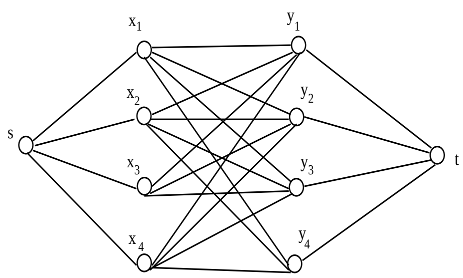

Abbildung 4: Netzwerk für Bsp. 30