

Kombinatorische Optimierung 1 WS 2012/2013

2. Übungsblatt

13. Finden Sie für den Graphen in Abbildung 2 ein maximales Branching.
14. Berechnen Sie für den Graphen in Abbildung 3 den kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten.
15. Berechnen Sie für den Graphen in Abbildung 3 ohne Berücksichtigung der Kantenorientierung den kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten.
16. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der das folgende Problem löst:
Finden Sie für einen gegebenen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ und zwei Knoten $s, t \in V$ einen Algorithmus, der den s - t -Weg bestimmt, für den die längste Kante so kurz als möglich wird.
Hinweis: Modifizieren Sie den Algorithmus von Dijkstra.
17. Bestimmen Sie mit dem Moore-Bellman-Ford Algorithmus den kürzesten Weg von s zu allen Knoten im gerichteten Graphen in Abbildung 4.
Was passiert, wenn Sie die Länge der Kante $(2, 3)$ auf 4 setzen? Testen Sie den Algorithmus auch für diesen Fall!
18. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten und $s, t \in V$.
 - (a) Formulieren Sie das Problem des kürzesten s - t -Weges als lineares Programm mit binären Variablen.
 - (b) Zeigen Sie, dass die Matrix der Restriktionen vollständig unimodular ist.
 - (c) Stellen Sie das duale Problem auf und zeigen Sie, dass die Länge des kürzesten s - t -Weges gleich dem Maximum von $\pi(t) - \pi(s)$ ist, wobei π ein (zulässiges) Knotenpotential ist.
19. Beweisen Sie folgenden Satz (vgl. Vorlesung) mit Hilfe der LP-Dualität:
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c(e) \in \mathbb{R}$, für alle $e \in E$. Die Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, $e \mapsto c(e)$, ist dann und nur dann konservativ, wenn es ein (zulässiges) Potential in (G, c) gibt.
20. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit konservativen Gewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ und zwei Knoten $s, t \in V$. Angenommen es gibt nur einen kürzesten s - t Weg P . Wie können Sie dann in polynomieller Zeit den zweitkürzesten s - t Weg, d.h. den kürzesten s - t -Weg abgesehen von P , bestimmen?
21. Berechnen Sie die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren und deren Länge für den Graphen in Abbildung 5.
22. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der den kürzesten gerichteten Kreis in G bestimmt.
Hinweis: Modifizieren Sie den Algorithmus von Floyd und Warshall.

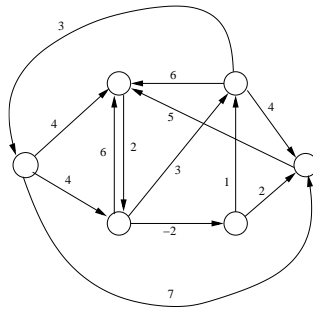


Abbildung 2: Beispiel 13

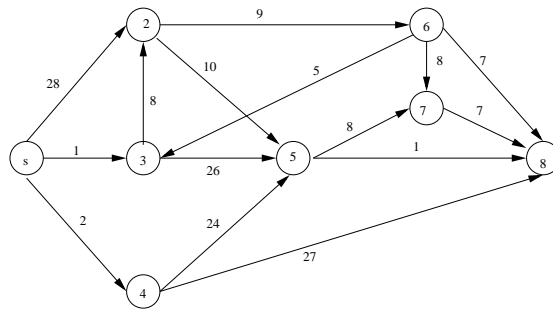


Abbildung 3: Beispiel 14, 15

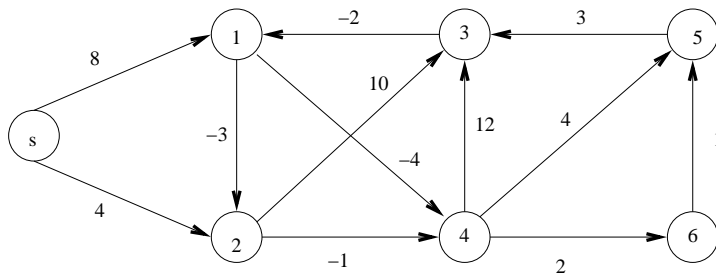


Abbildung 4: Beispiel 17

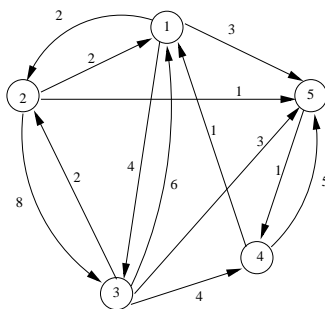


Abbildung 5: Beispiel 21