Kombinatorische Optimierung WS 2012-2013

1. Übungsblatt

1. Für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c: E \to \mathbb{R}$ soll ein zusammenhängender aufspannender Teilgraph minimalen Gewichtes bestimmt werden. Kann dieses Problem effizient gelöst werden? Wie?

2. (Der Kirchhoff'sche Matrix-Baum-Satz)
   Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit $|V| = n$ und sei $L(G)$ die Laplace Matrix von G. Sei B die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen G', der aus G entsteht, wenn jede Kante in E beliebig orientiert wird. Zeigen Sie:

   (a) Alle Minoren von $L(G)$, die durch das Löschen einer Zeile und einer Spalte von $L(G)$ entstehen, haben den gleichen Absolutbetrag.

   (b) Es gilt $L(G) = B \times B^t$, wobei B^t die transponierte Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix B ist.

   (c) Sei $L_{1,1}$ die Submatrix von $L(G)$, die durch das Löschen der ersten Zeile und Spalte entsteht. Sei weiters B_1 jene Submatrix der Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix B, die durch das Löschen der ersten Zeile von B entsteht. Es gilt $L_{1,1} = B_1 B_1^t$.

   (d) Sei $T \subseteq E$ mit $|T| = n - 1$. Betrachten Sie jene Spalten von B_1, die den Kanten aus T entsprechen. Die von diesen Spalten gebildete $(n-1) \times (n-1)$ Submatrix von B_1 wird mit B_T bezeichnet. Es gilt $|det(B_T)| = 1$ dann und nur dann, wenn T ein Spannbaum in G ist. Ansonsten gilt $det(B_T) = 0$.

   (e) Wenden Sie die Cauchy-Binet Formel

   $$det(L_{1,1}) = \sum_{T \subseteq E : |T| = n-1} det(B_T) det(B_T^t)$$

   an, um zu zeigen, dass $det(L_{1,1})$ gleich der Anzahl der Spannbäume in G ist. Folgern Sie daraus die Korrektheit des Matrix-Baum-Satzes (vgl. Vorlesung).

   Anmerkung: Die Cauchy-Binet-Formel muss nicht bewiesen werden.

3. (Färbungslemma von Minty)
   Betrachten Sie einen gerichteten Graphen, dessen Kanten grün, rot oder blau gefärbt sind. Sei $e \in E$ eine blaue Kante. Dann gilt genau eine der beiden Aussagen.

   (a) e ist in einem ungerichteten Kreis enthalten, dessen Kanten ausschließlich grün oder blau gefärbt sind, sodass alle blauen Kanten im Kreis dieselbe Orientierung haben.

   (b) e ist in einem ungerichteten Schnitt enthalten, dessen Kanten ausschließlich rot oder blau gefärbt sind, sodass alle blauen Kanten im Schnitt gleich gerichtet sind.

4. (Ein generischer Algorithmus für das Minimale Spannbaum Problem)
   Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit Kantengewichten $c: E \to \mathbb{R}$. Betrachten Sie folgendes Verfahren zur Färbung der Kanten von G in roten und grünen Kanten. Solange es eine ungefärbte Kante in G existiert, wende eine der beiden Färbungsregeln.

   Rote Regel

   Falls es in G einen Kreis K mit folgenden beiden Eigenschaften gibt, dann färbe die teuerste ungefärbte Kante aus K rot.

   (a) K enthält keine rote Kante.

   (b) Es existieren ungefärbte Kanten in K.

Grüne Regel

Falls es in G einen Schnitt $\delta(X)$ mit $\emptyset \neq X \subset V$ mit folgenden beiden Eigenschaften gibt, dann färbe die billigste ungefärbte Kante aus $\delta(X)$ grün.

(a) $\delta(X)$ enthält keine grüne Kante.

(b) Es existieren ungefärbte Kanten in $\delta(X)$.

Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Solange es ungefärbte Kanten gibt, ist entweder die rote oder die grüne Regel anwendbar.

(b) Nach jeder Anwendung der roten oder grünen Regel gilt: Es existiert ein optimaler Spannbaum in G, der alle grünen und keine roten Kanten enthält. Mit anderen Worten: Die Existenz eines solchen Baums ist eine Invariante des Algorithmus.

(c) Der in (a) beschriebene Algorithmus liefert einen minimalen Spannbaum in G.

5. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{R}$. Gesucht ist die Menge $E' \subseteq E$ derjenigen Kanten e in G, für die es einen minimalen spannenden Baum T_e mit $e \in T_e$ gibt. Anders ausgedruckt möchte man die Vereinigung aller aufspannenden Bäume minimalen Gewichtes in G bestimmen. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems an und analysieren Sie die Zeitkomplexität ihres Algorithmus.

6. Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Kruskal einen minimalen spannenden Baum für den Graphen aus Abbildung 1.

7. Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Prim einen minimalen spannenden Baum für den Graphen aus Abbildung 1 (wählen Sie den Knoten 1 als Startknoten).

8. *Das Engpass-Spannbaum-Problem (bottleneck MST)*
Für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{R}$ soll ein Spannbaum T gefunden werden, mit der Eigenschaft, dass das Gewicht der schwersten Kante in T so gering wie möglich ist. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems an und analysieren Sie die Zeitkomplexität ihres Algorithmus.

9. Das Voronoï-Diagramm einer endlichen Menge $V \subset \mathbb{R}^2$ besteht aus den Gebieten

$$P_v := \{x \in \mathbb{R}^2\colon ||\mathrm{x} - \mathrm{v}||_2 = \min_{\mathrm{w} \in \mathrm{V}} ||\mathrm{x} - \mathrm{w}||_2\}$$

für alle $v \in V$. Die Delaunay-Triangulierung von V ist der Graph

$$(V, \{(v, w)\colon v, w \in V, v \neq w, |P_u \cap P_v| > 1\}).$$

Ein minimaler Spannbaum für V ist ein Baum $T = (V(T), E(T))$ mit Knotenmenge $V(T) = V$ und minimaler Länge $\sum_{(v,w) \in E(T)} ||v - w||_2$. Beweisen Sie, dass jeder minimaler Spannbaum von V ein Teilgraph der Delaunay-Triangulierung ist.

10. Für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit den Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{R}$ und einen Knoten $v \in V$ soll ein aufspannender Baum T minimalen Gewichtes in G bestimmt werden, in dem v kein Blatt ist. Kann man dieses Problem in polynomieller Zeit lösen? Begründen Sie ihre Antwort!

11. Sei $G = (V, E)$ ein Digraph mit n Knoten und $r \in V$. Dann sind die folgenden acht Aussagen äquivalent.

(1) G ist eine Arboreszenz mit Wurzel r.

(2) G ist ein Branching mit $n - 1$ Kanten und $\deg^-(r) = 0$.

(3) G hat $n - 1$ Kanten und jeder Knoten ist von r aus erreichbar.

(4) Jeder Knoten ist von r aus erreichbar, aber das Entfernen einer beliebigen Kante zerstört diese Eigenschaft.

(5) Es gilt $\delta^+(X) \neq \emptyset$ für alle $X \subset V$ mit $r \in X$, aber das Entfernen einer beliebigen Kante zerstört diese Eigenschaft.

(6) $\deg^-(r) = 0$ und für jedes $v \in V \setminus \{r\}$ gibt es einen eindeutig bestimmten r-v-Weg.

(7) $\deg^-(r) = 0$ und $\deg^-(v) = 1$ für alle $v \in V \setminus \{r\}$, und G ist kreisfrei.

(8) $\deg^-(r) = 0$ und $\deg^-(v) \leq 1$ für alle $v \in V \setminus \{r\}$, und jeder Knoten $v \in V$ ist von r aus erreichbar.

12. Kann man in linearer Zeit entscheiden ob ein Graph eine aufspannende Arboreszenz hat? Begründen Sie ihre Antwort.

    Hinweis: Um eine mögliche Wurzel zu bestimmen kann man bei einem beliebigen Knoten anfangen und so lange wie möglich Kanten rückwärts entlang gehen. Wenn man einen Kreis erreicht, dann wird der Kreis kontrahiert.

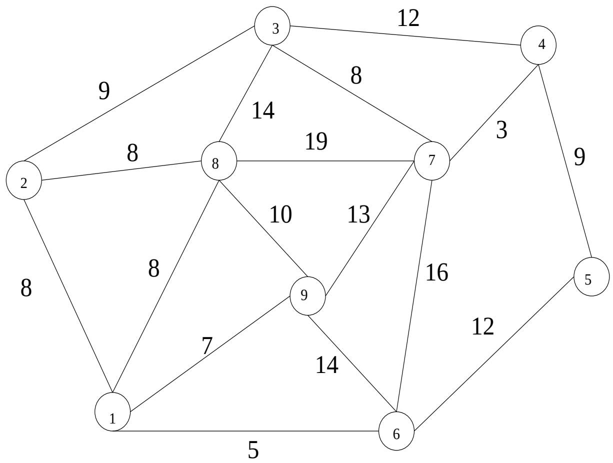

Abbildung 1: Input für die Beispiele 6 und 7