Kombinatorische Optimierung 1 WS 2014/2015
6. Übungsblatt

41. Zeigen Sie: Sei $r \geq 1$ und $G = (A \cup B, E)$ ein r-regulärer bipartiter Graph, d.h. ein bipartiter Graph in dem jeder Knoten Grad r hat ($\deg(v) = r$, $\forall v \in V(G)$). Dann lässt sich die Kantenmenge E in r disjunkte perfekte Matchings partitionieren.

42. Es gilt folgende Aussage (Satz von Ghouila-Houri, 1962): Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist dann und nur dann vollständig unimodular, wenn es für jedes $R \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ eine Partition $R = R_1 \uplus R_2$ gibt mit
$$\sum_{i \in R_1} a_{ij} - \sum_{i \in R_2} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\},$$
für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ [1].

    (a) Zeigen Sie (zB. mit Hilfe des Satzes von Ghouila-Houri), dass die Bedingungen des Satzes von Heller und Tompkins (vgl. Vorlesung) notwendig für die vollständige Unimodularität einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \{0, -1, +1\}^{m \times n}$ mit höchstens zwei nicht-Null Einträgen pro Spalte sind.

    (b) Ist die folgende Matrix vollständig unimodular?
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    (c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß die vollständige Unimodularität der Matrizen A und B nicht hinreichend für die vollständige Unimodularität der Matrix $(A|B)$ ist.

43. Eine $m \times n$ Matrix mit 0-1 Einträgen wird als *Intervallmatrix* bezeichnet, wenn für alle Spalten die 1-Einträge ein Intervall bilden, d.h. daß aus $a_{ij} = a_{kj} = 1$ mit $k > i + 1$ folgt, daß $a_{\ell j} = 1$ für alle $\ell = i + 1, \ldots, k - 1$ gilt. Zeigen Sie, daß Intervallmatrizen vollständig unimodular sind.

44. Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (U \cup V, E)$ mit $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ und $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ mit Hilfe der Adjazenzmatrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
d.h. $\{u_i, v_j\} \in E \iff a_{i,j} = 1$. Geben Sie ein Matching mit maximaler Kardinalität an. Verwenden Sie dieses Matching um eine minimale Knotenüberdeckung zu finden!

[1] Im Rahmen dieses Übungsbeispiels muss der Satz nicht bewiesen werden. Ambitionierte können versuchen einen Beweis zu erbringen, Interessierte können den Beweis zB. in *B. Korte und J. Vygen, Kombinatorische Optimierung, Springer, 2008, Seite 124-125,* nachlesen.