Kombinatorische Optimierung 1 WS 2014/2015
4. Übungsblatt

30. Sei G ein Digraph mit Kantenkapazitäten $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ und Balance-Werten $b\colon V(G) \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$. Beweisen Sie, dass es genau dann einen b-Fluss gibt, wenn folgende Ungleichung gilt:
$$\sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \geq \sum_{v \in X} b(v) \text{ für alle } X \subseteq V(G)\,.$$
Hinweis: Um die hinreichende Bedingung zu zeigen, kann die Charakterisierung der Existenz eines b-Flusses anhand eines maximalen Fluss-Problems herangezogen werden. Für das max-Fluss-Problem kann dann der max-Fluss-min-Schnitt-Satz verwendet werden.

31. Sei G ein Digraph mit Kantenkapazitäten $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$, und seien $b_1, b_2\colon V(G) \to \mathbb{R}$ mit $b_1(v) \leq b_2(v)$ für alle $v \in V(G)$. Beweisen Sie, dass es genau dann einen Fluss $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und
$$b_1(v) \leq \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) \leq b_2(v) \text{ für alle } v \in V(G)$$
gibt, wenn
$$\sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \geq \max\left\{ \sum_{v \in X} b_1(v),\ - \sum_{v \in V(G)\setminus X} b_2(v) \right\}$$
für alle $X \subseteq V(G)$.

Hinweis: Ein möglicher Ansatz wäre, das obige Existenzproblem auf die Existenz eines b-Flusses in einem Hilfsgraphen zurückzuführen und dann das Kriterium aus Beispiel 30 anzuwenden.

32. Betrachten Sie das in Aufgabe 31 beschriebene Problem erweitert um eine Kostenfunktion $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Wie findet man einen Fluss, der die Bedingungen von Aufgabe 31 erfüllt und die Kosten minimiert?

Hinweis: Führen Sie dieses Problem auf ein Minimales-Kosten-Fluss-Problem zurück.

33. Ein Restaurantbesitzer hat folgendes Problem: Er weiß, dass für den Tag i der nächsten Woche d_i Servietten benötigt werden ($i = 1, \ldots, 7$). Jeden Morgen können frische Servietten zum Preis von a Euro pro Serviette gekauft werdenn. Ferner kann am Ende jeden Tages ein Teil der benutzten Servietten zur Reinigung gebracht werden. Dort gibt es das Schnell- und Normalservice zum Preis von je b bzw. c Euro pro Serviette. Bei der Normalreinigung erhält man die Servietten am übernächsten Tag in der Früh, bei der Schnellreinigung bereits am nächsten Tag. Modellieren Sie das Problem als minimales Kostenflussproblem.

34. (a) Lösen Sie das in der Abbildung 1 gegebene MKFP mit Hilfe des MMCC-Algorithmus, wobei für jede Kante (i, j) die Kapazitäten und die Kosten $(u(i, j), c(i, j))$ und für jeden Knoten die Nachfrage bzw. das Angebot $b(v)$ gegeben sind. Verwenden Sie dabei folgenden Startfluss: $f(1, 3) = 1, f(3, 4) = 3, f(3, 5) = 2, f(2, 3) = 4, f(5, 2) = 8$.

    (b) Geben Sie für den optimalen Fluss f zulässige Knotenpotentiale $\pi(v)$ an und überprüfen Sie, dass $c_\pi(e) \geq 0$ für alle $e \in E(G_f)$.

35. Lösen Sie das in der Abbildung 1 gegebene MKFP mit Hilfe des kürzesten augmentierenden Wegealgorithmus.

36. Lösen Sie das in der Abbildung 2 gegebene MKFP mit Hilfe des kürzesten augmentierenden Wegealgorithmus und achten Sie darauf, dass die Kantenlängen durch geeignete Knotenpotentiale immer positiv bleiben! Auf den Kanten (i, j) sind wieder die Werte $(u(i, j), c(i, j))$ gegeben.

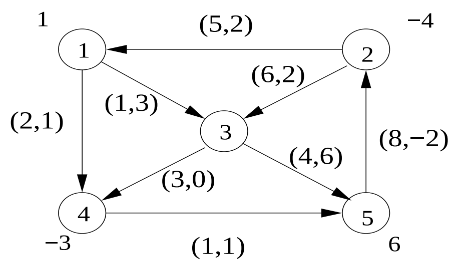

Abbildung 1: MKFP für Aufgabe 34 und 35

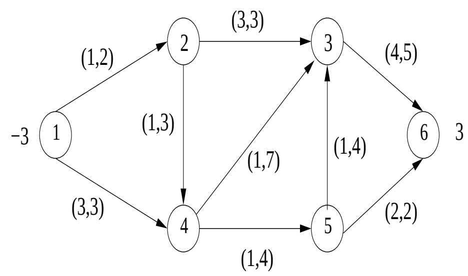

Abbildung 2: MKFP für Aufgabe 36