**Kombinatorische Optimierung WS 2014-2015**

**3. Übungsblatt**

21. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt im Graphen in Abbildung 1. Die Zahlen auf den Kanten geben dabei die Kapazitäten an. Starten Sie den Algorithmus mit dem folgenden Fluss:

| Kante | s-1 | s-2 | s-3 | 1-2 | 2-3 | 1-t | 2-t | 3-t |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fluss | 8 | 8 | 0 | 2 | 2 | 6 | 8 | 2 |

Geben Sie den optimalen Flusswert explizit an!

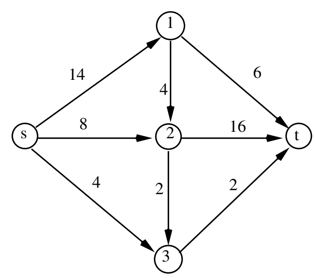


Abbildung 1: Netzwerk für Bsp. 21

22. Sei $(G, u, s, t)$ ein Netzwerk mit einem Digraphen $G$, einer Kapazitätfunktion $u \colon E(G) \to \mathbb{R}_+$, einer Quelle $s$ und einer Senke $t$. Ein $s$-$t$-Fluss in $(G, u, s, t)$ heißt *blockierend*, wenn der Digraph $(V(G), \{e \in E(G) \colon f(e) < u(e)\})$ keinen s-t-Weg enthält. Zeigen Sie: in einem azyklischen Netzwerk $(G, u, s, t)$ kann ein blockierender Fluss in $O(nm)$ Zeit ermittelt werden, wobei $n := |V(G)|$ und $m := |E(G)|$. Bestimmen Sie algorithmisch einen blockierenden Fluss für den Level-Graphen in Abbildung 2.

23. Sei $(G, u, s, t)$ ein Netzwerk und $f$ ein $s$-$t$-Fluss in $G$, so dass der Null-Fluss $f'$ in $G_f^L$, d.h. $f'(e) = 0$, $\forall e \in E(G_f^L)$, ein blockierender Fluss in $G_f^L$ ist. Zeigen Sie, dass $f$ ein maximaler $s$-$t$-Fluss in $G$ ist.

    Notation (vgl. Vorlesung): $G_f^L$ bezeichnet den *Level-Graphen* zum Residualgraphen $G_f$, d.h. es gilt

$$V(G_f^L) = V(G) \text{ und } E(G_f^L) = \{e = (u, v) \in E(G_f) \colon dist_{G_f}(s, v) = dist_{G_f}(s, u) + 1\},$$

    wobei $dist_{G_f}(s, x)$ die Kantenanzahl eines $s$-$x$-Weges mit minimaler Kantenanzahl in $G_f$ ist.

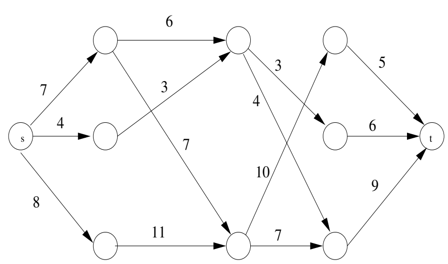


Abbildung 2: Netzwerk für Bsp. 22

24. (Für Ambitionierte.)

   (a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford und Fulkerson im Falle von irrationalen Kapazitäten nicht zwangsweise terminiert. Betrachten Sie dazu das Netzwerk aus Abbildung 3. Alle Liniensegmente sind Kanten in beiden Richtungen. Jede Kante hat Kapazität $\frac{1}{1-\sigma}$ bis auf die folgenden 4 Kanten mit den Kapazitäten:

$$u((x_1, y_1)) = 1\,,\ u((x_2, y_2)) = \sigma\,,\ u((x_3, y_3)) = u((x_4, y_4)) = \sigma^2$$

   wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Beachten Sie, dass $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge $(v(f_i))_{i\in\mathbb{N}}$ wobei $v(f_i)$ der Wert des in der $i$-ten Iteration generierten Flusses ist.

   (b) Lösen Sie das obige Problem mit dem Algorithmus von Edmonds und Karp.

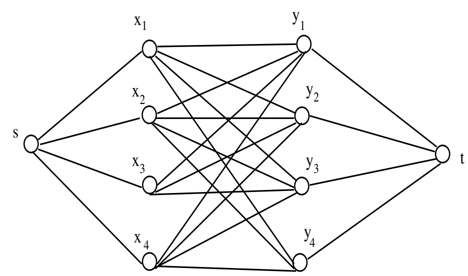


Abbildung 3: Netzwerk für Bsp. 24

25. Verwenden Sie den Push-Relabel Algorithmus zur Bestimmung eines maximalen s-t-Flusses im Netzwerk in Abbildung 4. Die Zahlen neben den Kanten sind die Kantenkapazitäten. Führen Sie folgende zwei Varianten des Algorithmus durch:

   (a) Die aktiven Knoten werden in einer FIFO Liste („First In First Out“ gespeichert. Neue aktiv gewordene Knoten werden am Ende der Liste hinzugefügt. Die aktuelle Push/Relabel Iteration wird stets am ersten aktiven Knoten in der Liste durchgeführt. Für jeden aktiven Knoten $v$ wird auch eine FIFO Liste der mit $v$ inzidierenden Kanten in $G_f$ geführt. Die aktuelle Push Operation wird stets über die erste erlaubte Kante in der Liste des ausgewählten aktiven Knoten durchgeführt.

   (b) Es wird immer der aktive Knoten mit der höchsten Distanzmarkierung ausgewählt. Die Auswahl der Kante für die Push-Operation erfolgt mit Hilfe einer FIFO Liste wie in der Variante (a).

   Vergleichen Sie die Anzahl der Relabel, saturierende-Push und nicht-saturierende-Push Operationen in den beiden Varianten des Algorithmus.

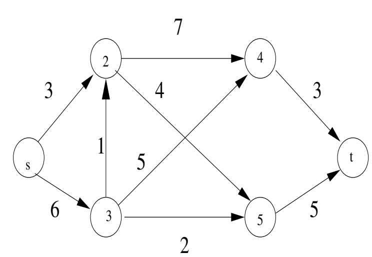


Abbildung 4: Netzwerk für Bsp. 25, 26 und 27

26. Wenden Sie den Gomory-Hu-Algorithmus an, um den Gomory-Hu-Baum für das Netzwerk in Abbildung 4 zu bestimmen. Die Zahlen neben den Kanten sind die Kantenkapazitäten.

27. Bestimmen Sie unter Anwendung der MA-Reihenfolge (Ansatz von Stoer und Wagner, 1997, vgl. Vorlesung) einen Schnitt mit minimaler Kapazität für das Netzwerk in Abbildung 4.

28. Sei $(G, u, s, t)$ ein Netzwerk mit Kapazitäten $u\colon E(G) \to \mathbb{Z}_+$. In diesem Graph wird jener minimaler $s$-$t$-Schnitt gesucht, der unter allen minimalen $s$-$t$-Schnitten die geringste Anzahl von Kanten besitzt. Zeigen Sie, dass ein minimaler $s$-$t$-Schnitt in $(G, \bar{u}, s, t)$ mit $\bar{u}(e) = |E(G)|u(e) + 1$, $\forall e \in E(G)$, ein minimaler $s$-$t$-Schnitt mit der kleinsten Anzahl von Kanten in $(G, u, s, t)$ ist.

29. Seien $\lambda_{ij}$ mit $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, nichtnegative Zahlen mit $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ und $\lambda_{ik} \geq \min\{\lambda_{ij}, \lambda_{jk}\}$ für paarweise verschiedenen Indizes $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass es einen Graphen $G$ mit $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ und Kapazitäten $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ gibt, so dass die lokalen Kantenzusammenhangszahlen (vgl. Vorlesung) genau die Zahlen $\lambda_{ij}$ sind.

    Hinweis: Man betrachte einen spannenden Baum maximalen Gewichtes im vollständigen Graphen $(K_n, c)$ wobei die Gewichte durch $c((i, j)) := \lambda_{ij}$, für alle $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, gegeben sind.