Kombinatorische Optimierung WS 2014-2015

2. Übungsblatt

12. Berechnen Sie für den Graphen in Abbildung 1 den kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten und ggf. auch eine (Knoten)Potenzialfunktion.

13. Berechnen Sie für den Graphen in Abbildung 1 ohne Berücksichtigung der Kantenorientierung den kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten.

14. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der das folgende Problem löst:
Finden Sie für einen gegebenen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}_+$ und zwei Knoten $s, t \in V$ einen Algorithmus, der den $s - t$-Weg bestimmt, für den die längste Kante so kurz als möglich wird.
Hinweis: Modifizieren Sie den Algorithmus von Dijkstra.

15. Bestimmen Sie mit dem Moore-Bellman-Ford Algorithmus den kürzesten Weg von s zu allen Knoten im gerichteten Graphen in Abbildung 2.
Was passiert, wenn Sie die Länge der Kante $(2, 3)$ auf 4 setzen? Testen Sie den Algorithmus auch für diesen Fall!

    binären Variablen.

16. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit konservativen Gewichten $c : E \to \mathbb{R}$ und zwei Knoten $s, t \in V$. Angenommen es gibt nur einen kürzesten s-t Weg P. Wie können Sie dann in polynomieller Zeit den zweitkürzesten s-t Weg, d.h. den kürzesten s-t-Weg abgesehen von P, bestimmen?

17. Berechnen Sie die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren und deren Länge für den Graphen in Abbildung 3.

18. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der den kürzesten gerichteten Kreis in G bestimmt.
Hinweis: Modifizieren Sie den Algorithmus von Floyd und Warshall.

19. Kürzeste Wege in azyklischen Graphen.

    Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $n := |V|$. Eine topologische Sortierung in G ist eine bijektive Abbildung $f : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft $f(i) < f(j)$ für alle $(i, j) \in E$.

    (a) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, der keine gerichteten Kreise enthält. Ein solcher Graph heißt *kreisfrei* oder *azyklisch*. Verwenden Sie ein Tiefensuche-Verfahren um eine topologische Sortierung f in G in linearer Zeit zu bestimmen. Zeigen Sie, dass die durch das Tiefensuche-Verfahren bestimmte Abbildung f keine topologische Sortierung in G ist, falls der Inputgraph G einen gerichteten Kreis enthält. Somit liegt auch ein linearer Algorithmus zur Erkennung der Kreisfreiheit eines Graphen vor.

    (b) Modifizieren Sie den Moore-Bellman-Ford Algorithmus so, dass er im Falle von azyklischen Graphen die kürzesten Wege von einer Quelle aus und deren Längen in linearer Zeit bestimmt.

    (c) Betrachten wir nun das sogenannte Längste-Wegeproblem: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und zwei Knoten $s, t \in V$. Gesucht sei der längste $s - t$-Weg in G. Können Sie für dieses Problem einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit angeben? Wie lautet die Antwort der obigen Frage wenn der Inputgraph $G = (V, E)$ azyklisch ist?

20. Betrachten Sie den gerichteten Graphen in Abbildung 2 und verringern Sie das Gewicht jeder Kante um 2.

    (a) Bestimmen Sie (nicht durch kompleter Enumeration aller Kreise) ob dieser Graph einen negativen Kreis enthält.

    (b) Bestimmen Sie einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Gewicht.

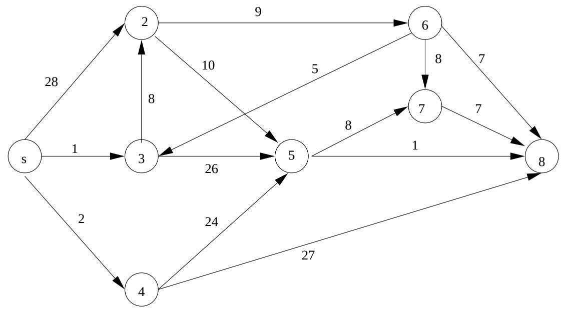

Abbildung 1: Beispiel 12, 13

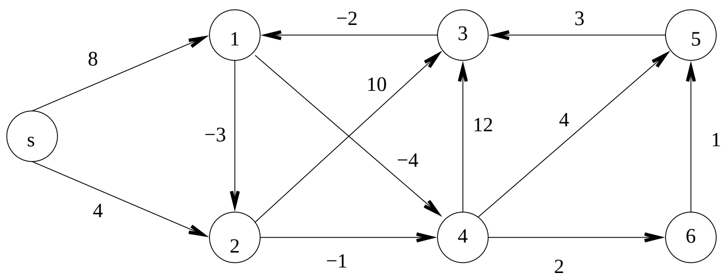

Abbildung 2: Beispiel 15

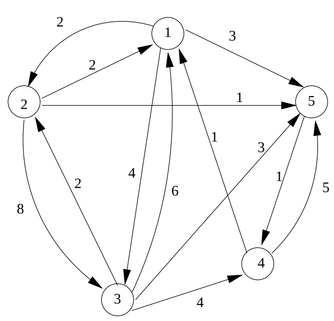

Abbildung 3: Beispiel 18 und 21